Cinématique du solide indéformable

1) Objectif.

La cinématique permet de décrire et caractériser les mouvements des solides (parties opératives telles que bras de robot, manège…), indépendamment des causes qui les produisent.

2) Référentiel (espace-temps).

21) Notion de référence spatiale.

Référence spatiale.

Soit un voyageur assis dans un wagon roulant.
Nous remarquons que :

- le voyageur est ***au repos*** ***PAR RAPPORT*** ***au wagon,***
- le voyageur est ***en mouvement*** ***PAR RAPPORT*** ***à la terre.***

Par conséquent nous pouvons dire qu'un solide est en mouvement, si auparavant nous avons défini une référence spatiale.

Une référence spatiale sera définie par un repère spatial = origine spatiale + base orthonormée directe.

Repère spatial attaché à un solide.

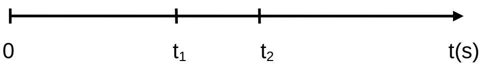
Un repère spatial attaché à un solide est un repère tel que tous les points constituant le solide soient sans mouvement par rapport à ce repère.

22) Notion de référence temporelle.

Choisir une référence spatiale ne suffit pas. En effet, un solide est en mouvement par rapport à un repère spatial, si sa position évolue par rapport au temps.

Par conséquent nous pouvons dire qu'un solide est en mouvement, si auparavant nous avons défini une référence temporelle.

Une référence temporelle sera définie par un repère temporel orienté dans le sens de la succession des évènements dans le temps.



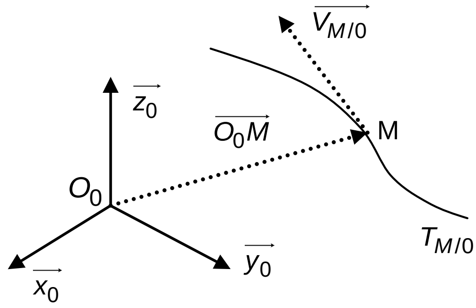
Chaque point de ce repère est appelé **instant**.
L'abscisse de l'instant est appelé **date** (t). Son unité est la **seconde** (s).

23) Référentiel = repère spatial + repère temporel.

L'ensemble formé par le repère spatial et le repère temporel est nommé référentiel.

3) Cinématique du point (rappel des notions vues en physique).

31) Trajectoire d'un point : $T_{M/0}$



Au cours du temps, le point M décrit dans le repère R_0 une courbe appelée **trajectoire du point M dans R_0** et notée $\boxed{T_{M/0}}$.

32) Vecteur position d'un point : $\overrightarrow{O_0M}$.

Le vecteur position du point M dans un repère R_0 d'origine O_0, à la date t est le vecteur : $\boxed{\overrightarrow{O_0M}}$.

33) Vecteur vitesse d'un point : $\overrightarrow{V_{M/0}}$.

Le vecteur vitesse du point M dans un repère R_0 d'origine O_0, à la date t est le vecteur :

$\boxed{\overrightarrow{V_{M/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right]_{R_0}}$ ou $\boxed{\overrightarrow{V_{M/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{P_0M}}{dt}\right]_{R_0}}$ **en choisissant P_0 point fixe dans R_0.**

(Unité de la norme du vecteur vitesse : m.s^{-1})

Remarque : Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M/0}}$ est tangent à la trajectoire du point M dans le repère R_0.

34) Vecteur accélération d'un point : $\overrightarrow{\Gamma_{M/0}}$.

Le vecteur accélération du point M dans un repère R_0 d'origine O_0, à la date t est le vecteur : $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{M/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{M/0}}}{dt}\right]_{R_0}}$

(Unité de la norme du vecteur accélération : m.s^{-2})

4) Cinématique du solide.

41) Définition du solide indéformable.

Tous les solides se déforment lorsqu'ils subissent des charges. Ces déformations dépendent des charges, des dimensions et de la matière. Définir le mouvement d'un solide déformable est un problème complexe. Dans de nombreux cas les déformations sont suffisamment petites pour que l'on puisse les négliger. Afin de simplifier l'étude, **on associe alors au solide réel S le modèle simplifié du solide indéformable** tel que :

$$\boxed{\forall t, \forall A \in S, \forall B \in S, \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = Cte}.$$

Les solides dont la fonction est de se déformer (ressorts, barres de torsion, …) sont exclus de cette définition. On acceptera dans ce cours le terme de solide pour solide indéformable.

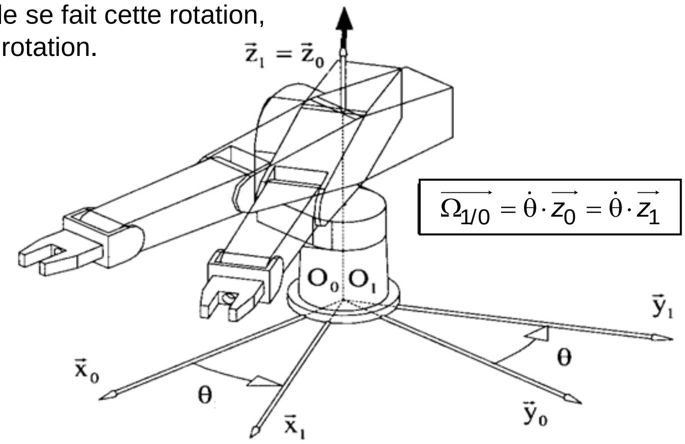
La cinématique d'un solide indéformable en mouvement, possède des particularités qui permettent une étude simplifiée du mouvement global sans avoir à étudier chaque point individuellement (comme pour la cinématique du point).

La mise en évidence de ces particularités est l'objectif de cette partie.

42) Vecteur rotation d'une base B_1 par rapport à une autre base B_0 (appelé aussi vecteur vitesse de rotation ou vecteur taux de rotation).

Ce vecteur, noté $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ caractérise :

- par sa direction, la direction de l'axe autour duquel B_1 tourne autour de B_0,
- par sa norme, la vitesse angulaire avec laquelle se fait cette rotation,
- par son sens, le sens dans lequel se fait cette rotation.



$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_1}}$$

NB1 : $\boxed{\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}}$

(Composition des vecteurs vitesses de rotation)

NB2 : $\boxed{\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = -\overrightarrow{\Omega_{0/2}}}$

43) Trajectoire d'un point appartenant à un solide : $T_{M\in 2/0}$.

Pour être rigoureux, on parlera de :	**- trajectoire d'un point,** **- mouvement d'un solide.**

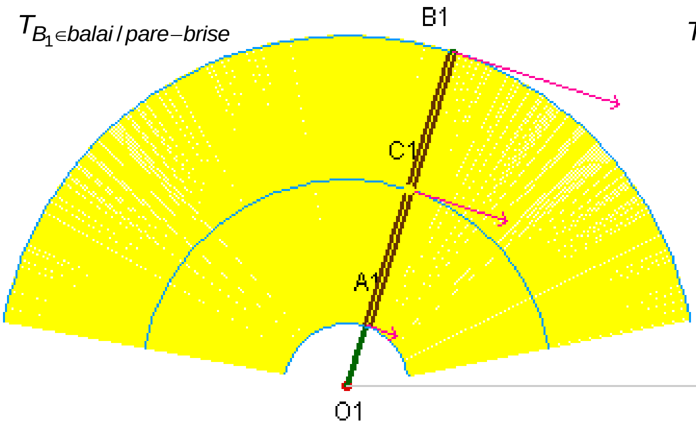
Pour déterminer une trajectoire, il faut avant tout connaître le mouvement entre les 2 solides étudiés.

Exemples :

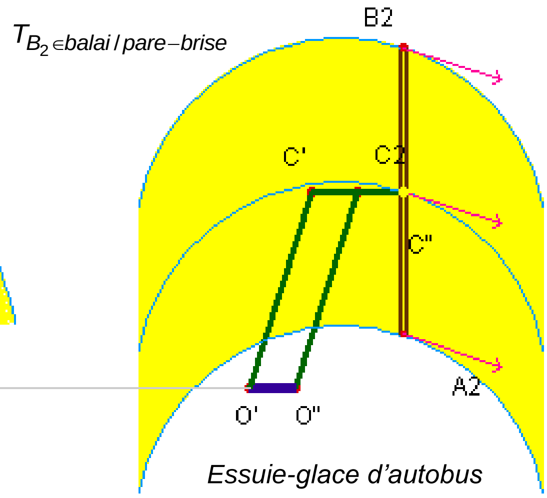
Trajectoires de points appartenant à un solide en mouvement de translation rectiligne.
Les trajectoires sont des segments de droite.

Trajectoires de points appartenant à un solide en mouvement de translation circulaire.
(exemple : balai d'un essuie-glace d'autobus ci-dessous, ou grande roue d'une fête foraine)
Les trajectoires sont des arcs de cercle de même rayon.

Trajectoires de points appartenant à un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe.
(exemple : balai d'un essuie-glace de voiture ci-dessous)
Les trajectoires sont des arcs de cercle de même centre (dans le plan) ou de même axe (dans l'espace).



Essuie-glace de voiture



Essuie-glace d'autobus

Déterminer $T_{M\in 2/0}$ signifie d'obtenir $T_{M/0}$ en considérant que « $M \in 2$ » (même si ce n'est pas le cas dans la réalité). Ceci peut entraîner fictivement le blocage de certain mouvement (voir TD08).

44) Vecteur vitesse d'un point appartenant à un solide : $\overrightarrow{V_{M\in 2/0}}$.

441) Définition du « champ » des vecteurs vitesse des points appartenant à un solide.

Soit un solide 2 attaché à un repère R_2, en mouvement par rapport au repère R_0.

On note $\overrightarrow{V_{M\in 2/0}}$ la vitesse du point M appartenant au solide 2 dans son mouvement par rapport au repère R_0.

L'ensemble des vecteurs vitesses des points du solide 2 est appelé champ des vecteurs vitesses du solide 2.

Exemples ci-dessus où l'on peut observer le champ des vecteurs vitesses des points du balai dans son mouvement par rapport au repère du pare-brise.

NB : $\boxed{\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = -\overrightarrow{V_{M\in 0/2}}}$

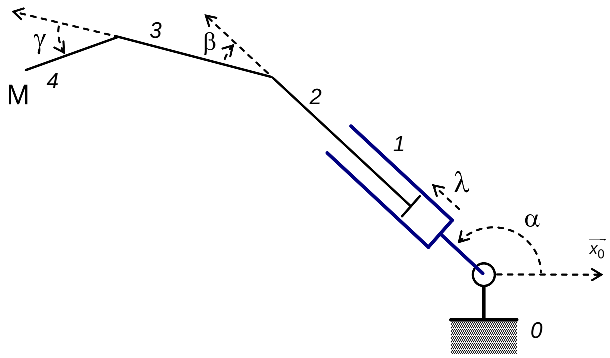
442) 1ère méthode pour déterminer analytiquement le vecteur vitesse d'un point appartenant à un solide : Dérivation vectorielle.

Méthode.

$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{M/0}} + "M \in 2"$ $= \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right]_0 + "M \in 2"$	Si M appartient réellement à 2	$"M \in 2"$ n'apporte aucune condition supplémentaire	$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right]_0$
	Si M n'appartient pas réellement à 2	$"M \in 2"$ apporte des conditions supplémentaires	$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right]_0 + \text{"paramètres variables qui deviennent constants"}$

Comment dériver alors un vecteur ??? et comment traduire $"M \in 2"$???

Exemples de conditions d'appartenance.



$"M \in 4" \quad \Leftrightarrow \quad -$

$"M \in 3" \quad \Leftrightarrow \quad "\gamma = c^{te}"$

$"M \in 2" \quad \Leftrightarrow \quad "\gamma = c^{te} \quad et \quad \beta = c^{te}"$

$"M \in 1" \quad \Leftrightarrow \quad "\gamma = c^{te} \quad et \quad \beta = c^{te} \quad et \quad \lambda = c^{te}"$

Dérivée temporelle d'un vecteur mobile par rapport à un repère.

Soit le vecteur $\vec{U} = a \cdot \overrightarrow{x_1} + b \cdot \overrightarrow{y_1} + c \cdot \overrightarrow{z_1}$, exprimé dans le repère R_1.

La dérivée par rapport au temps de ce vecteur dans un repère R_0 mobile par rapport à R_1, est :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{a} \cdot \overrightarrow{x_1} + a \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} + \dot{b} \cdot \overrightarrow{y_1} + b \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_0} + \dot{c} \cdot \overrightarrow{z_1} + c \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{z_1}}{dt}\right]_{R_0} .$$

Il faut donc apprendre à déterminer la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à un autre repère…

Dérivée temporelle d'un vecteur unitaire mobile par rapport à un repère.

On admet que **si** $\overrightarrow{x_8}$ **est un vecteur <u>unitaire</u> de B_8** alors $\left[\dfrac{d\overrightarrow{x_8}}{dt}\right]_{R_3} = \overrightarrow{\Omega_{8/3}} \wedge \overrightarrow{x_8}$

Il ne faut jamais utiliser cette relation pour des vecteurs non-unitaires.

443) 2ème méthode pour déterminer analytiquement le vecteur vitesse d'un point appartenant à un solide : Composition des vecteurs vitesses suivie de la relation du champ des vecteurs vitesses des points appartenant à un solide.

Composition des vecteurs vitesses : $\boxed{\overrightarrow{V_{M\in2/0}} = \overrightarrow{V_{M\in2/1}} + \overrightarrow{V_{M\in1/0}}}$.

(Seulement si le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement élémentaire)

L'exemple classique du voyageur en mouvement dans le train, montre qu'il est parfois plus facile, pour calculer la vitesse d'un point par rapport à un repère, de calculer celle-ci par rapport à un repère intermédiaire…

Relation du champ des vecteurs vitesses des points appartenant à un solide.

Soit un solide 1 en mouvement par rapport à un repère R_0.

Soit A et B deux points du solide 1.

alors $\boxed{\overrightarrow{V_{B\in1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}}$

Méthode.

$\boxed{\overrightarrow{V_{M\in2/0}} = \overrightarrow{V_{M\in2/1}} + \overrightarrow{V_{M\in1/0}}}$	Si un des mouvements élémentaires est une rotation (ex : le mouvement de 1/0 est une rotation de centre A)	$\overrightarrow{V_{M\in1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in1/0}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$
	Si un des mouvements élémentaires est une translation (ex : le mouvement de 2/1 est une translation)	$\overrightarrow{V_{M\in2/1}} = \overrightarrow{V_{M/1}} + "M \in 2" = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_1 + "M \in 2"$

444) Représentation par un torseur : le torseur cinématique.

Grâce à la relation précédente, on peut, connaissant la vitesse d'un point appartenant à un solide et son vecteur rotation dans son mouvement par rapport à un repère de référence, déterminer la vitesse de tous les autres points du solide.

Le couple formé par ***le vecteur rotation*** $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ et le ***vecteur vitesse*** $\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$ constitue le ***torseur cinématique*** du solide 1 dans son mouvement par rapport au solide 0 et exprimé au point A :

$\boxed{\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\\ \overrightarrow{V_{A\in1/0}}\end{array}\right\}}$	$\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ est la ***résultante cinématique*** du torseur, indépendante du point choisi pour exprimer le torseur.
	$\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$ est le ***moment cinématique*** du torseur au point A.

Nous avons établi que : $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\\ \overrightarrow{V_{P\in2/0}} = \overrightarrow{V_{P\in2/1}} + \overrightarrow{V_{P\in1/0}}\end{array}\right.$.

Ainsi la composition des torseurs cinématiques est valable : $\boxed{\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}}$

Attention : **pour sommer des torseurs, ces derniers doivent être exprimés au même point.**

NB : $\boxed{\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\} = -\left\{\mathcal{V}_{0/2}\right\}}$

45) Vecteur accélération d'un point appartenant à un solide : $\overrightarrow{\Gamma_{M\in2/0}}$.

Le champ des vecteurs accélérations des points appartenant à un solide ne peut pas être décrit par un torseur car ce n'est pas un champ de moment ($\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$, ici $\overrightarrow{\Gamma_{B\in1/0}} \neq \overrightarrow{\Gamma_{A\in1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$).

Ainsi, pour déterminer une accélération, nous serons obligés à chaque fois de dériver le vecteur vitesse.

5) Mouvements particuliers.

51) Mouvements de translation.

Un solide 2 est en mouvement de translation par rapport à un repère 1 si et seulement si son vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ est nul.

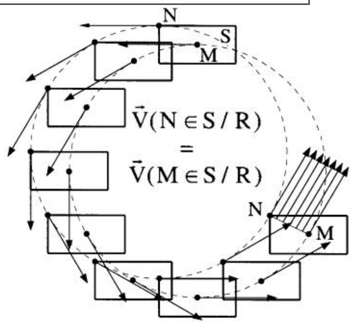
Selon la loi du champ des vecteurs vitesses, ceci implique que **tous les points du solide ont même vecteur vitesse <u>à l'instant t</u>. Mais attention : ce vecteur vitesse n'est pas nécessairement constant dans le temps.**

La forme du torseur cinématique sera donc : (quelque soit le point de réduction) $\boxed{\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} = \underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} \end{Bmatrix}}}$

$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$ signifie aussi que B1=B2 (même orientation), mais attention R1≠R2 car les origines sont différentes.

Il existe plusieurs types de mouvement de translation selon la nature de la trajectoire :

- **translation rectiligne** : les trajectoires des points sont des segments de droite,
- **translation circulaire** : les trajectoires des points sont des arcs de cercle de même rayon (voir ci-contre, la grande roue d'une fête foraine),
- **translation curviligne** : les trajectoires des points décrivent des courbes quelconques.



52) Mouvements de rotation.

Un solide 2 est en mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) par rapport à un repère R1, si en tout point C de l'axe (Δ) :

$$\boxed{\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} = \underset{\forall C\in(\Delta)}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}}$$

- Pour tout point $C \in (\Delta)$, on a $\overrightarrow{V_{C\in 2/1}} = \vec{0}$ **(vitesse nulle sur l'axe de rotation)**
- $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ est colinéaire à l'axe (Δ), appelé aussi **axe instantané de rotation** (ou axe central du torseur).
- Les trajectoires des points du solide 2 / R1 sont des arcs de cercle de centre un point appartenant à l'axe (Δ).
- Soit $M \notin (\Delta)$ et C le projeté orthogonal de M sur (Δ), on a :

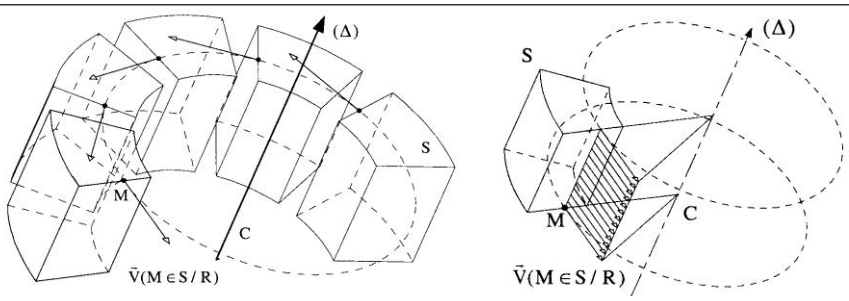
$\overrightarrow{V_{M\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{C\in 2/1}} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overrightarrow{V_{M\in 2/1}} \perp \overrightarrow{MC}}$

Comme $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$, on a $\left\|\overrightarrow{V_{M\in 2/1}}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}\right\| . \left\|\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\right\|$ avec $\left\|\overrightarrow{MC}\right\| = R$ et $\left\|\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\right\| = \omega \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\left\|\overrightarrow{V_{M\in 2/1}}\right\| = \omega . R}$

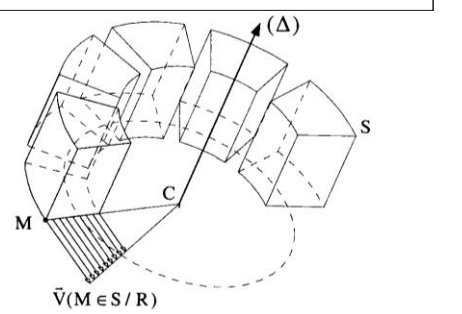
$\Rightarrow \qquad \boxed{\left\|\overrightarrow{V_{M\in 2/1}}\right\| \text{ proportionnelle à } \left\|\overrightarrow{MC}\right\|}$

Le vecteur vitesse de tout point non situé sur (Δ) est tangent à sa trajectoire circulaire et a une norme proportionnelle à la distance séparant le point de l'axe instantané de rotation.

On parle alors de <u>**répartition linéaire des vitesses**</u> des points appartenant à un solide en rotation.



Les vecteurs vitesses de points situés à une même distance de (Δ) ont même norme



La norme est proportionnelle à la distance séparant M de C

53) Mouvements uniforme et uniformément varié.

Un mouvement de translation ou de rotation est dit :

- uniforme si l'accélération (linéaire pour translation ou angulaire pour rotation) est nulle (vitesse constante dans le temps),
- uniformément varié si l'accélération (linéaire pour translation ou angulaire pour rotation) est constante.

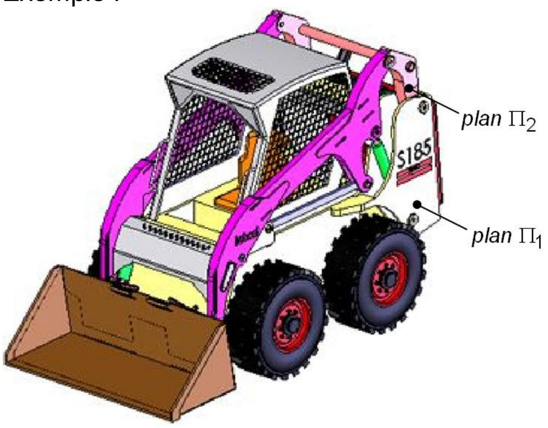
6) Cinématique graphique.

61) Mouvement plan sur plan.

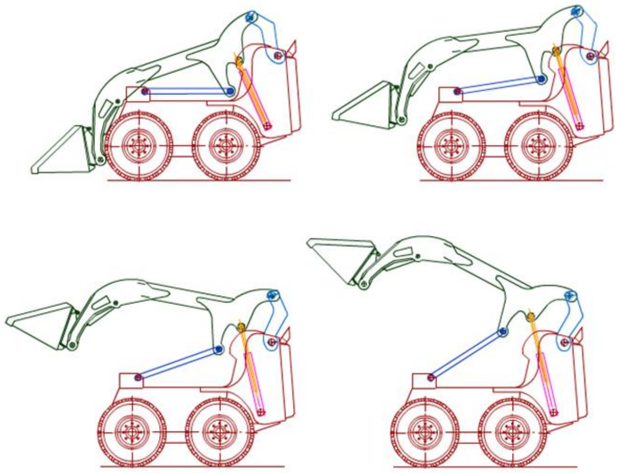
611) Définition du mouvement plan sur plan.

Le mouvement d'un solide 2 par rapport à un solide 1 est considéré comme étant « plan sur plan », s'il existe un plan Π_2 du solide 2 qui reste constamment confondu avec un plan Π_1 du solide 1.

Exemple :



Chargeur Bobcat



612) Particularités d'un mouvement plan sur plan.

- le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ est perpendiculaire aux plans Π_1 et Π_2 ;
- les vecteurs vitesses sont tous parallèles aux plans Π_1 et Π_2 .

62) Avantages et inconvénients de la cinématique graphique par rapport à la cinématique analytique.

Avantages :

- Méthode plus visuelle et plus rapide.

Inconvénients :

- Méthode utilisée seulement pour des mouvements « plan sur plan ».
- Les résultats obtenus sont valables uniquement pour la position du système de la figure (sur laquelle ont été réalisés les tracés). Si l'on souhaite une vitesse d'un point du solide dans une autre position, il faut refaire le schéma et la construction graphique…
- Méthode moins précise.

63) Méthodes graphiques.

631) Différents cas d'utilisation.

La composition des vitesses est utilisée graphiquement dans 3 cas :

- pour déterminer une vitesse de glissement d'un point géométrique de contact,
- pour déterminer une vitesse d'un point situé au bout de la tige d'un vérin, dont le corps est en mouvement de rotation par rapport au solide de référence.
- pour déterminer une vitesse, qui dépend de 2 mouvements d'entrée (2 actionneurs).

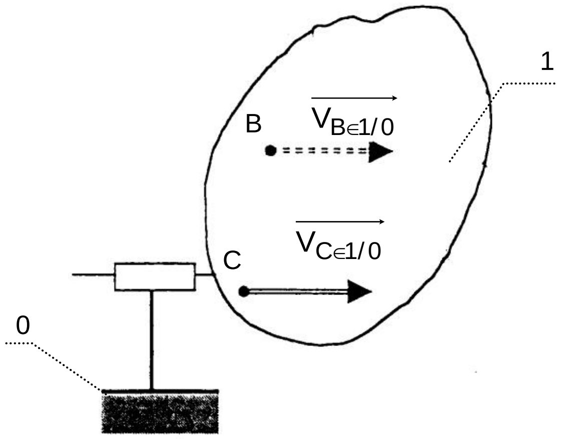
L'équiprojectivité et le CIR sont utilisés pour déterminer une vitesse d'un point d'une pièce ayant un mouvement quelconque par rapport au bâti (c'est-à-dire que c'est ni une rotation, ni une translation).

632) Translation.

Si on connaît : - 1 vecteur $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$,
- le mvt de 1/0 (translation).

Alors on peut déduire $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ **:**

$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ (propriété de la translation).



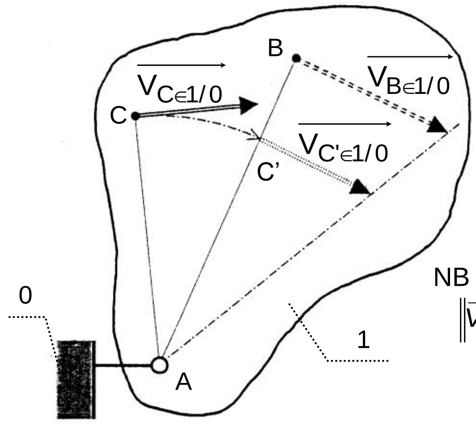
633) Rotation de centre A.

Si on connaît : - 1 vecteur $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$,
- le mvt de 1/0 (rotation de centre A).

Alors on peut déduire $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ **:**

On trace (AB) et (AC) puis on construit C' ou B'.
Si on choisit de tracer C', on peut déduire $\overrightarrow{V_{C'\in 1/0}}$ car $\overrightarrow{V_{C'\in 1/0}} \perp [AC']$ et, $\left\|\overrightarrow{V_{C'\in 1/0}}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}\right\|$ car [AC]=[AC'].

De $\overrightarrow{V_{C'\in 1/0}}$ on déduit $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ par la **répartition linéaire des vitesses**.



NB : on sait aussi que $\left\|\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}\right\| = \omega_{1/0}.AB$

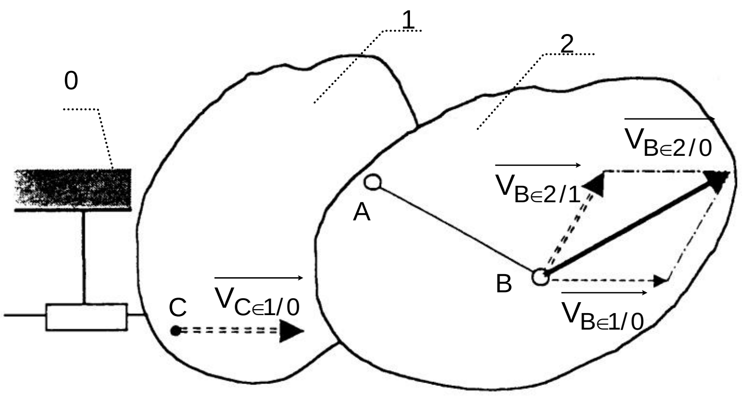
634) Composition des vecteurs vitesses.

Si on connaît : - 2 vecteurs $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$.

Alors on peut déduire $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$ **:**

On compose en B : $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$.

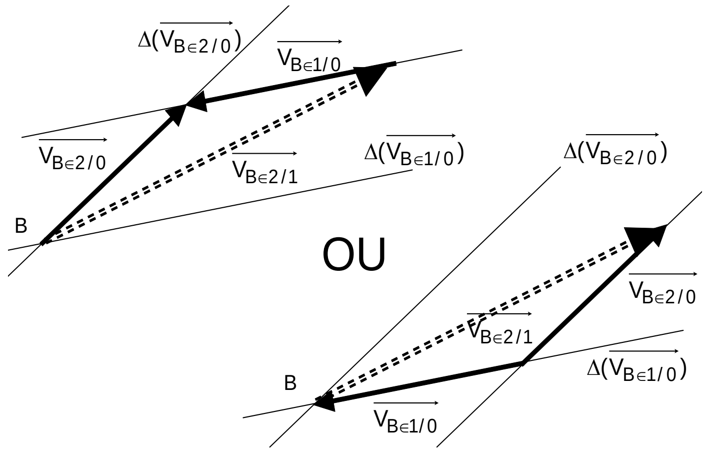
Remarque dans l'exemple ci-dessous, le mvt de 1/0 est une translation et le mvt de 2/1 est une rotation de centre A.
Ainsi $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$ a bien 2 composantes : une, issue de la translation ($\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$) et l'autre, issue de la rotation ($\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}$)…



Si on connaît : - 1 vecteur $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}$,
- 2 directions $\Delta(\overrightarrow{V_{B\in 2/0}})$ et $\Delta(\overrightarrow{V_{B\in 1/0}})$.

Alors on peut déduire $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ **:**

On reporte une direction connue à l'autre extrémité du vecteur connue, et on trace le triangle de composition des vecteurs vitesses.
Suivant le choix de la direction à déplacer, 2 constructions aboutissant au même résultat peuvent être effectuées :



NB : La composition n'est pas l'équiprojectivité : les vecteurs composantes ne sont pas forcément orthogonaux.

635) Centre Instantané de Rotation : CIR.

Définition du CIR.

Si 2 solides sont en **mouvement plan sur plan** (de normale $\vec{z}$), alors **à tout instant** on peut considérer que le mouvement de 2/1 ou 1/2 est une **rotation autour d'un axe de rotation** de direction $\vec{z}$.
Si le mouvement est quelconque, **cet axe de rotation se déplacera** à chaque instant perpendiculairement au plan d'étude : c'est un axe **instantané** de rotation.

Pour un mouvement de rotation, cet axe est fixe.

Notons $I_{2/1}$ ou $I_{1/2}$ le point d'intersection entre l'axe instantané de rotation et le plan de l'étude.
$I_{2/1}$ est alors appelé centre **instantané** de rotation (CIR) du mouvement de 2/1.

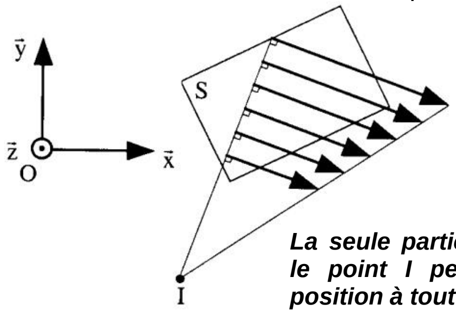
Propriétés du CIR.

1) $I_{2/1} = I_{1/2}$ centre instantané de rotation	$\Rightarrow$	$\boxed{\overrightarrow{V_{I_{2/1}\in 2/1}} = \vec{0}}$ (vitesse nulle au centre de rotation)
2) $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{I_{2/1}\in 2/1}} + \overrightarrow{PI_{2/1}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \Rightarrow \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \overrightarrow{PI_{2/1}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ $\Downarrow$	$\Rightarrow$	$\boxed{\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} \text{ et } \overrightarrow{PI_{2/1}} \text{ perpendiculaires}}$
3) $\left\Vert\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\right\Vert = \left\Vert\overrightarrow{PI_{2/1}}\right\Vert . \left\Vert\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\right\Vert = \omega . R$ (car $\overrightarrow{PI_{2/1}} \perp \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$)	$\Rightarrow$	$\boxed{\left\Vert\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\right\Vert \text{ est proportionnelle à } \left\Vert\overrightarrow{PI_{2/1}}\right\Vert}$

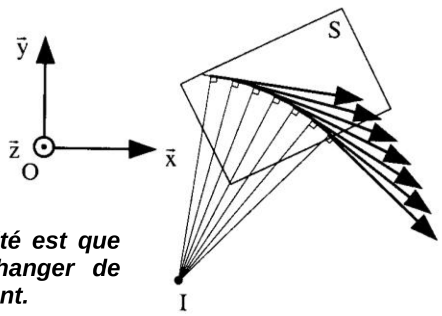
Répartition linéaire des vecteurs vitesses.

La répartition des vecteurs vitesses des points de S par rapport à R est semblable à celle de tout mouvement de rotation autour du point I :

- linéarité des vitesses sur toute droite passant par le CIR,
- égalité des normes des vecteurs vitesses pour tous les points situés à la même distance du CIR.



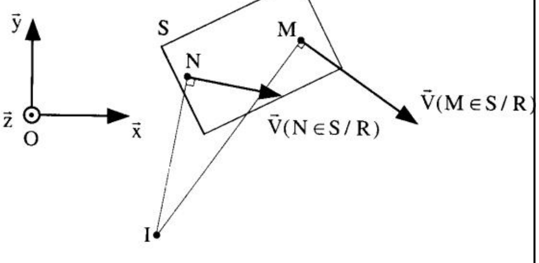
La seule particularité est que le point I peut changer de position à tout instant.



Détermination géométrique du CIR.

Il est primordial de situer le CIR, car s'il est connu, il permet de déterminer tous les vecteurs vitesses des points appartenant à un solide à partir de la donnée d'un seul de ces vecteurs vitesses.

1/ Connaissant 2 vecteurs vitesses, le CIR se place à l'intersection des normales à ces 2 vecteurs vitesses.
NB : Dans un mouvement plan sur plan, toutes les normales aux vitesses sont concourantes au CIR.



2/ Pour un mouvement de rotation, le CIR est fixe, c'est le centre de rotation.

3/ Pour un mouvement de translation, le CIR est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à celle des vecteurs vitesses.

4/ Tout point de Roulement Sans Glissement (RSG) est un CIR.

5/ La dernière méthode consiste à utiliser le théorème des 3 plans glissants (voir page suivante).

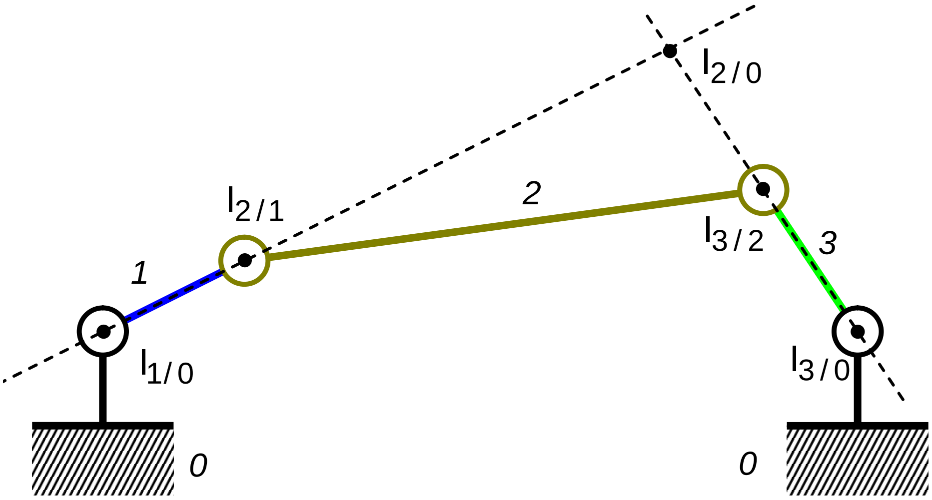
Théorème des trois plans glissants.

Soit S1, S2 et S3 trois solides en mouvement plan sur plan de normale $\vec{z}$.
On note $I_{2/1}$, $I_{3/2}$ et $I_{3/1}$ les centres instantanés de rotation des mouvements relatifs 2/1, 3/2 et 3/1,

Alors, les CIR des mouvements relatifs $I_{2/1}$, $I_{3/2}$ et $I_{3/1}$ sont alignés.

Exemple :

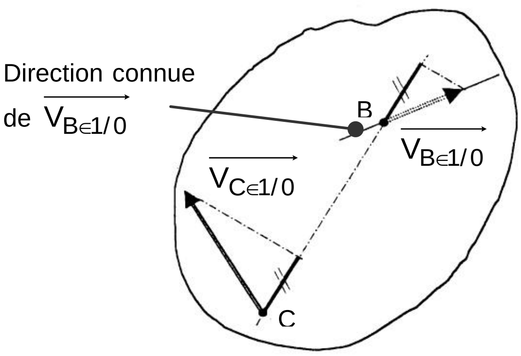
La propriété d'alignement des CIR est utilisée pour déterminer le CIR du mouvement de 2/0.



636) Équiprojectivité.

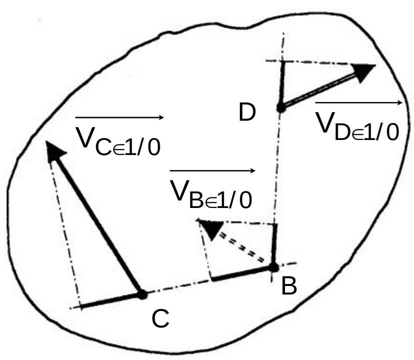
Si on connaît : - 1 vecteur $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$,
- 1 direction $\Delta(\overrightarrow{V_{B\in 1/0}})$.

Alors on peut déduire $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ **:**
On trace (BC).
On construit la projection de $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ sur (BC)
On en déduit $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ car : $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{V_{C\in 1/0}}.\overrightarrow{BC}$
($\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ a la même projection sur (BC) que $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$)



Si on connaît : - 2 vecteurs $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{D\in 1/0}}$.

Alors on peut déduire $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ **:**
On trace (BC) et (BD).
En appliquant 2 fois l'équiprojectivité,
$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{V_{C\in 1/0}}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{V_{D\in 1/0}}.\overrightarrow{BD}$
on construit 2 projections de $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ que l'on peut déduire.

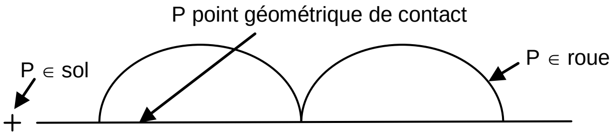


7) Cinématique du contact ponctuel.

71) Points coïncidents - Trajectoire et vitesse d'un point géométrique de contact.

Il est délicat de savoir ce qu'il se passe en un point de contact P car on distingue **3 points coïncidents** à l'instant t :

- $P \in S1$ $\Leftarrow$ **point lié à S1,**
- $P \in S2$ $\Leftarrow$ **point lié à S2,**
- $P \notin S1 \, et \, S2$ $\Leftarrow$ **point géométrique de contact.**

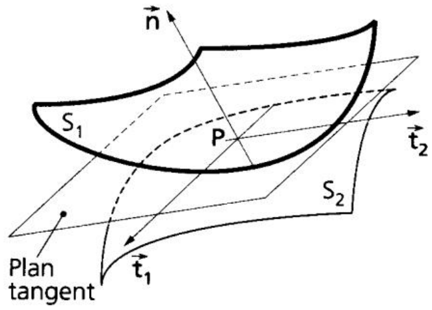


Ex : Lorsqu'une roue se déplace sur le sol, au point de contact P entre la roue et le sol, on distingue :

- P ∈ sol : c'est le gravillon fixe du bitume, sa trajectoire par rapport au sol est un point.
- P ∈ roue : il est attaché à la roue, sa trajectoire par rapport au sol est une cycloïde.
- P : point géométrique de contact, sa trajectoire appartient au sol (elle représente les positions successives prises par le point géométrique de contact entre la roue et le sol).

Pour déterminer la trajectoire d'un point géométrique de contact dans un repère, **on déterminera** d'abord **<u>son vecteur position dans ce repère</u>**.
Pour déterminer la vitesse d'un point géométrique de contact dans un repère, on dérivera son vecteur position dans ce repère.

72) Roulement, pivotement, glissement.



En un point de contact P entre deux solides S1 et S2, on peut définir :

- un plan tangent commun aux deux solides,
- une normale au contact $\vec{n}$.

Dans un repère local de contact $(P,\vec{n},\vec{t_1},\vec{t_2})$, on définira :

$$\boxed{\left\{\mathrm{V}_{2/1}\right\} = {}_P\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} \end{Bmatrix} = {}_P\begin{Bmatrix} \Omega_n.\vec{n} + \Omega_{t1}.\vec{t_1} + \Omega_{t2}.\vec{t_2} \\ 0.\vec{n} + V_{t1}.\vec{t_1} + V_{t2}.\vec{t_2} \end{Bmatrix}}$$

- $\Omega_n.\vec{n} \neq \vec{0}$ **correspond à un pivotement de S2/S1 autour de la normale commune de S2/S1.**
- $\Omega_{t1}.\vec{t_1} + \Omega_{t2}.\vec{t_2} \neq \vec{0}$ **correspond à un roulement de S2/S1 dans le plan tangent de S2/S1.**
- $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}.\vec{n} = 0$ **indique le maintien de contact sans pénétration de S2/S1.**
- $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = V_{t1}.\vec{t_1} + V_{t2}.\vec{t_2} \neq \vec{0}$ **correspond à un glissement en P de S2//S1 dans le plan tangent de S2/S1.**
  $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}$ **est appelée vitesse de glissement. Elle appartient au plan tangent commun au contact.**

Pour déterminer analytiquement <u>une vitesse de glissement</u>, il ne faudra JAMAIS utiliser la dérivation vectorielle avec les conditions $\boxed{P \in S1}$ ou $\boxed{P \in S2}$, car il est impossible de traduire ces conditions d'appartenance. Deux méthodes peuvent être alors utilisées pour calculer cette vitesse :

- $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{P/1}} - \overrightarrow{V_{P/2}}$: décomposition, puis calcul de $\overrightarrow{V_{P/1}}$ et $\overrightarrow{V_{P/2}}$ par la dérivation vectorielle ;
- $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{P\in 2/0}} - \overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$: composition des vecteurs vitesses, suivie de la relation du champ des vecteurs vitesses des points appartenant à un solide – Voir partie 443).

Pour déterminer graphiquement une vitesse de glissement, il faut utiliser la composition des vecteurs vitesses (voir partie 631).

Remarque : les composantes de pivotement et de roulement du vecteur rotation dépendent du point de contact contrairement au vecteur rotation qui est indépendant du point considéré.
Pour obtenir ces composantes, il suffit de déterminer le vecteur rotation des 2 pièces en contact, puis de le projeter suivant la normale au contact et suivant le plan tangent.

73) Roulement sans glissement : RSG.

On dira que S2 roule sans glisser sur S1 en P si la vitesse de glissement est nulle : $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \vec{0}$ **.**

$\boxed{\text{Tout point de RSG est un CIR}}$ (voir paragraphe sur les CIR).