

Modélisation cinématique des liaisons

1) MODELISATION DES PIECES PAR DES « SOLIDES PARFAITS »	5
2) MODELISATION DES LIAISONS	5
21) MODELISATION DES LIAISONS PAR DES « LIAISONS PARFAITES »	5
22) NOTION DE REPERE LOCAL	5
23) NOTION DE DEGRE DE LIBERTE D'UNE LIAISON.	5
24) LIAISONS NORMALISEES ENTRE SOLIDES.	6
Complète ou encastrement.....	6
Glissière de direction \vec{x}	6
Appui plan de normale \vec{z}	6
Linéaire rectiligne de ligne de contact (O, \vec{x}) et de normale \vec{z}	6
Ponctuelle de point de contact O et de normale \vec{z}	6
Pivot glissant d'axe (O, \vec{x})	7
Pivot d'axe (O, \vec{x})	7
Hélicoïdale d'axe (O, \vec{x}) et de pas p.....	7
Rotule de centre O.....	7
Rotule à doigt de centre O et de rotation interdite (O, \vec{y})	7
Linéaire annulaire de centre O et de direction \vec{x}	7
3) MODELISATION CINEMATIQUE DES MECANISMES : GRAPHE DE LIAISON ET SCHEMA CINEMATIQUE MINIMAL	8
31) ROLE DU SCHEMA CINEMATIQUE.	8
32) METHODE DE TRACE (UTILISER DE LA COULEUR).....	8
Étape 1 : Préciser la phase d'étude.....	8
Étape 2 : Rechercher les Classes d'Équivalence Cinématique (CEC).....	8
Étape 3 : Réaliser le graphe de liaison (minimum de liaisons donc sans liaison en parallèle). .	8
Étape 4 : Tracer le schéma cinématique minimal.....	8
4) LES LIAISONS SUR ELEMENTS ROULANTS	9
41) LES ROULEMENTS A BILLES, A ROULEAUX OU A AIGUILLES.	9
42) LES BUTEES A BILLES OU A ROULEAUX.	10
43) LES DOUILLES A BILLES OU A ROULEAUX.....	10
44) LES VIS A BILLES OU A ROULEAUX.	10
45) LES GUIDAGES A BILLES OU A ROULEAUX SUR RAILS.	10

5) GRAPHE DE STRUCTURE ET SCHEMA D'ARCHITECTURE.	11
51) DIFFERENCE ENTRE SCHEMA CINEMATIQUE ET SCHEMA D'ARCHITECTURE.	11
52) EXEMPLE : LIAISON ENTRE UN ARBRE 1 ET UN BATI 0 REALISEE PAR L'ASSOCIATION DE 2 ROULEMENTS.	11
6) LIAISONS CINEMATIQUEMENT EQUIVALENTES.....	12
61) DEFINITION D'UNE LIAISON EQUIVALENTE.....	12
62) LIAISONS EN SERIE.	12
$\{V_{Leq}\} = \{V_{3/0}\} = \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\}$	12
Exemple : Patin à rotule.....	12
63) LIAISONS EN PARALLELE.	13
$\{V_{Leq}\} = \{V_{1/0}\} = \{V_{1/0}^A\} = \{V_{1/0}^B\} = \{V_{1/0}^C\}$	13
Exemple : Liaison entre un arbre 1 et un bâti 0 réalisée par l'association de 2 roulements. ...	13
7) LOI ENTREE-SORTIE D'UN MECANISME.	14
71) CHAINES DE SOLIDES OUVERTE, FERMEE ET COMPLEXE.....	14
<i>Chaîne ouverte</i>	14
<i>Chaîne fermée</i>	14
<i>Chaîne complexe</i>	14
72) DEFINITION D'UNE LOI ENTREE-SORTIE.	14
73) DETERMINATION D'UNE LOI E/S.....	14
<i>Chaîne ouverte</i>	14
Cours 05 – Cinématique du solide.....	14
<i>Chaîne fermée</i>	14
Fermeture géométrique liant les paramètres de position.	14
Fermeture géométrique liant les paramètres d'orientation.	14
Fermeture cinématique.....	14
8) LES TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS CLASSIQUES.	15
81) BIELLE-MANIVELLE.	15
82) PIGNON-CREMAILLERE.....	15
83) VIS-ECROU.....	15
84) CROIX DE MALTE.....	16
85) EXCENTRIQUE.....	16
86) CAME RADIALE.	16
87) CAME AXIALE.	16

9) LES REDUCTEURS ET MULTIPLICATEURS DE VITESSE.	17
91) RAPPORT DE TRANSMISSION, DE REDUCTION ET DE MULTIPLICATION.	17
92) TRANSMISSION PAR ADHERENCE : ROUES DE FRICTION.	17
93) TRANSMISSION PAR OBSTACLE : ENGRENAGES.	18
<i>Terminologie.</i>	<i>18</i>
Engrenage, pignon, roue et couronne.	18
Diamètres primitifs.	18
Pas primitifs.	18
Module.	18
Rapport de transmission.	18
<i>Différents types d'engrenages.</i>	<i>19</i>
Engrenage cylindrique extérieur ou intérieur (à denture droite ou hélicoïdale).	19
Engrenage conique (à denture droite ou hélicoïdale).	19
Engrenage à roue et vis sans fin (appelé aussi engrenage à vis).	19
<i>Schémas normalisés.</i>	<i>20</i>
<i>Réducteurs ou multiplicateurs de vitesse à train simple.</i>	<i>20</i>
<i>Réducteurs ou multiplicateurs de vitesse à train épicycloïdal.</i>	<i>21</i>
Inconvénients des trains simples.	21
Inconvénients des engrenages à roue et vis sans fin.	21
Définitions d'un train épicycloïdal.	21
Trains épicycloïdaux plan et sphérique.	21
Planétaires, satellites et porte satellite.	21
Condition géométrique entraînant une relation sur le nombre de dents des différents éléments.	21
Disposition la plus fréquente.	22
Avantages des trains épicycloïdaux.	22
Relation cinématique : Relation de Willis.	22
Exemple du réducteur ATV.	23
94) LES LIENS FLEXIBLES (PIGNONS-CHAINE, POULIES-COURROIE)	24

Objectif : Donner une image simplifiée et symbolique d'un mécanisme pour faciliter :

- l'étude du fonctionnement
- l'étude des efforts, des vitesses...

1) Modélisation des pièces par des « solides parfaits ».

Nous supposons dans nos études mécaniques (sauf indication contraire) que les pièces mécaniques sont **des solides parfaits** :

- corps qui ont une masse constante
- indéformables
 - géométriquement parfaits
 - homogènes (corps dont les constituants sont de même nature ; ce qui n'est pas vrai pour le béton par exemple)
 - isotropes (corps dont les propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions ; ce qui n'est pas vrai pour les matières fibreuses par exemple)

NB : Les pièces déformables telles que les ressorts seront exclues de nos calculs lorsque nous utiliserons l'hypothèse de solide parfait.

2) Modélisation des liaisons.

On peut parler de **liaison entre 2 pièces lorsque celles-ci sont en contact**.

21) Modélisation des liaisons par des « liaisons parfaites ».

Nous supposons dans nos études mécaniques (sauf indication contraire) que les liaisons entre 2 pièces sont **des liaisons parfaites** :

- **surfaces de contact géométriquement parfaites**
- **jeu de fonctionnement nul entre les surfaces de contact**
- **contact supposé sans adhérence**

Une liaison parfaite est donc une liaison théorique, tant du point de vue géométrique que du point de vue de la nature physique du contact.

22) Notion de repère local.

En général, **le repère local** associé à une liaison entre deux solides **n'appartient à aucun des deux solides**.

De plus, l'origine sera plutôt placée en un point caractéristique de la liaison et les vecteurs directeurs de sa base correspondent dans la mesure du possible à des axes de symétrie, de révolution, ...

Enfin, il sera **choisi de sorte que les mouvements élémentaires soient indépendants**.

23) Notion de degré de liberté d'une liaison.

Soit $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère local associé à la liaison entre deux solides 1 et 2.

On peut définir des mouvements relatifs :
 T_x = liberté de mouvement de translation de direction \vec{x} ,
 R_x = liberté de mouvement de rotation d'axe (O, \vec{x}) ,

...

Un degré de liberté d'une liaison est UN MOUVEMENT RELATIF INDÉPENDANT que la liaison autorise entre les 2 solides considérés. (Attention à la liaison hélicoïdale...)

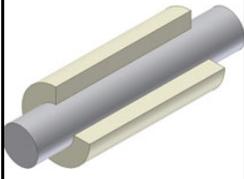
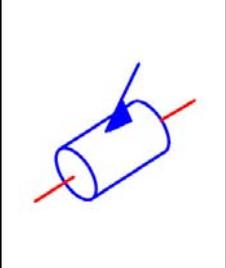
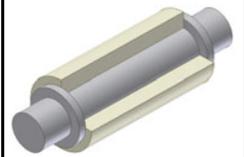
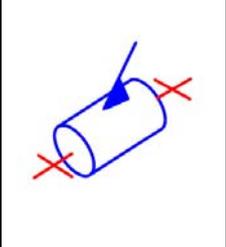
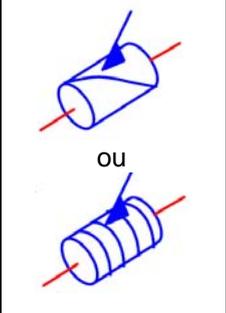
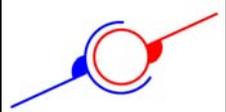
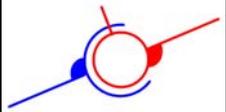
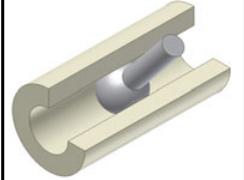
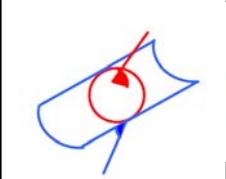
Il existe donc 6 degrés de liberté possibles :
 - 3 translations T_x , T_y et T_z de 1 par rapport à 0,
 - 3 rotations R_x , R_y et R_z de 1 par rapport à 0.

Par conséquent, le nombre de degrés de liberté entre deux solides est le nombre de paramètres cinématiques indépendants à DÉFINIR pour spécifier le torseur cinématique relatif entre ces deux solides.

24) Liaisons normalisées entre solides.

Parmi toutes les liaisons envisageables, la norme NF EN ISO 3952-1 (mai 95) a retenu les plus courantes.

	Nom	Représentation spatiale	Représentation plane	Validité de la forme générale du Torseur	Forme générale du Torseur cinématique
	Complète ou encastrement			Tout point A de l'espace	$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P} (\dots, \dots)$ <p>Et en plus, les valeurs des composantes sont identiques pour tout point P de l'espace</p>
 1 paramètre indépendant = 1 degré de liberté	Glissière de direction \vec{x}			Tout point A de l'espace	$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x,A \in 2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P} (\bar{x}, \dots)$ <p>Et en plus, les valeurs des composantes sont identiques pour tout point P de l'espace</p>
 3 paramètres indépendants = 3 degrés de liberté	Appui plan de normale \vec{z}			Tout point A de l'espace	$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x,A \in 2/1} \\ 0 & v_{y,A \in 2/1} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{z})} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ <p>Et en plus, les valeurs des composantes sont identiques pour tout point P de la normale (A, \vec{z})</p>
 4 paramètres indépendants = 4 degrés de liberté	Linéaire rectiligne de ligne de contact (O, \vec{x}) et de normale \vec{z} (ou alors cylindre-plan de ligne de contact (O, \vec{x}) et de normale \vec{z})			Tout point A du plan (O, \vec{x}, \vec{z})	$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & v_{x,A \in 2/1} \\ 0 & v_{y,A \in 2/1} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}_A (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
 5 paramètres indépendants = 5 degrés de liberté	Ponctuelle de point de contact O et de normale \vec{z} (ou alors sphère-plan de point de contact O et de normale \vec{z})			Tout point A de la normale (O, \vec{z})	$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & v_{x,A \in 2/1} \\ \omega_{y,2/1} & v_{y,A \in 2/1} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}_A (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

 <p>2 paramètres indépendants = 2 degrés de liberté</p>	<p>Pivot glissant d'axe (O, \vec{x})</p>		<p>Tout point A de l'axe (O, \vec{x})</p>	$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} & v_{x,A \in 2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \quad \forall P \in (A, \vec{x}) \quad (\vec{x}, \dots)$ <p>Et en plus, les valeurs des composantes sont identiques pour tout point P de l'axe (A, \vec{x})</p>
 <p>1 paramètre indépendant = 1 degré de liberté</p>	<p>Pivot d'axe (O, \vec{x})</p>		<p>Tout point A de l'axe (O, \vec{x})</p>	$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \quad \forall P \in (A, \vec{x}) \quad (\vec{x}, \dots)$ <p>Et en plus, les valeurs des composantes sont identiques pour tout point P de l'axe (A, \vec{x})</p>
 <p>1 paramètre indépendant = <u>1 degré de liberté</u></p>	<p>Hélicoïdale d'axe (O, \vec{x}) et de pas p</p>		<p>Tout point A de l'axe (O, \vec{x})</p>	$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} & \pm \omega_{x,2/1} \cdot \frac{p}{2\pi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \quad \forall P \in (A, \vec{x}) \quad (\vec{x}, \dots)$ <p>Car $2\pi \text{ (rad)} \rightarrow \pm p \text{ (mm)} \Rightarrow x = \pm \theta \cdot \frac{p}{2\pi} \Rightarrow v_x = \pm \omega_x \cdot \frac{p}{2\pi}$ $\theta \text{ (rad)} \rightarrow x \text{ (mm)}$</p> <p>Pas à droite + et Pas à gauche -</p> <p>Et en plus, les valeurs des composantes sont identiques pour tout point P de l'axe (A, \vec{x})</p>
 <p>3 paramètres indépendants = 3 degrés de liberté</p>	<p>Rotule de centre O (ou alors sphérique de centre O)</p>		<p>Seulement en O</p>	$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} & 0 \\ \omega_{y,2/1} & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{cases} \quad O \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
 <p>2 paramètres indépendants = 2 degrés de liberté</p>	<p>Rotule à doigt de centre O et de rotation interdite (O, \vec{y}) (ou alors sphérique à doigt de centre O et de rotation interdite (O, \vec{y}))</p>		<p>Seulement en O</p>	$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{cases} \quad O \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
 <p>4 paramètres indépendants = 4 degrés de liberté</p>	<p>Linéaire annulaire de centre O et de direction \vec{x} (ou alors sphère-cylindre de centre O et de direction \vec{x})</p>		<p>Seulement en O</p>	$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} & v_{x,O \in 2/1} \\ \omega_{y,2/1} & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{cases} \quad O \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

3) Modélisation cinématique des mécanismes : graphe de liaison et schéma cinématique minimal.

31) Rôle du schéma cinématique.

C'est une représentation minimale, simplifiée et codée du mécanisme, qui ne tient compte ni des formes ni des dimensions.

Il permet de traduire de façon simple le fonctionnement cinématique (les mouvements) du mécanisme et l'agencement des liaisons.

32) Méthode de tracé (UTILISER DE LA COULEUR).

Étape 1 : Préciser la phase d'étude.

Indiquer dans quelle phase vous étudiez le mécanisme. En effet, certaines pièces (ex : vis...) n'ont pas le même mouvement pendant leur fonctionnement que pendant leur montage ou pendant leur réglage...

Étape 2 : Rechercher les Classes d'Équivalence Cinématique (CEC).

CEC : groupes de pièces en liaison encastrement entre elles (n'ayant aucun mouvement relatif).

Cette étape se divise en 2 sous-étapes :

- 1) **Rechercher et colorier différemment chaque CEC** sur le dessin d'ensemble.
- 2) **Lister les pièces de chaque CEC** en commençant par la CEC « A » et la pièce « 1 » puis en continuant dans l'ordre croissant :

$$\{A\} = \{1, 3, \dots\} \quad \{B\} = \{2, 8, \dots\} \quad \dots$$

Remarques :

Toutes les pièces qui se déforment sont à exclure des CEC (ressorts, joints...).

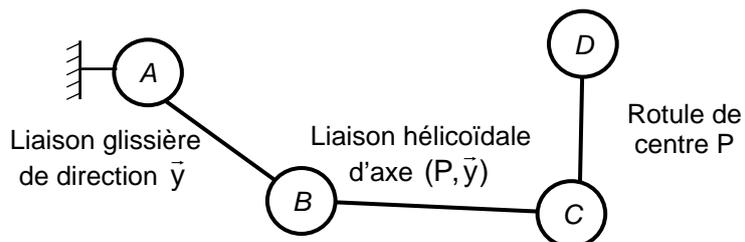
Les éléments roulants des roulements ne sont pas pris en compte.

Étape 3 : Réaliser le graphe de liaison (minimum de liaisons donc sans liaison en parallèle).

- 1) **Placer les CEC** en faisant en sorte qu'elles soient environ dans la même position que sur le dessin.
- 2) Préciser la pièce qui est le bâti.
- 3) **Déterminer les liaisons entre ces CEC** en identifiant la géométrie du contact.

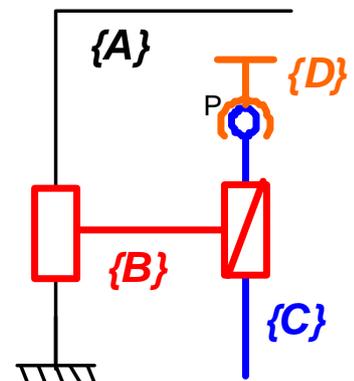
Exemple : graphe de liaison du serre-joint ci-dessous

NB : On ne verra JAMAIS apparaître de liaison encastrement sur un graphe de liaison.



Étape 4 : Tracer le schéma cinématique minimal.

- 1) **Positionner**, en respectant les proportions, **les centres et les axes des liaisons**.
- 2) **Mettre en place les représentations symboliques des liaisons élémentaires et du bâti** en respectant le code de couleur retenu et l'orientation de la liaison par rapport au repère.
- 3) **Relier tous les éléments de même couleur** en respectant les proportions et les formes générales du mécanisme à schématiser.
- 4) Compléter « éventuellement » par quelques traits le schéma pour faciliter la compréhension.
- 5) **Vérifier le schéma** : pour cela, analyser les mouvements des différentes CEC du schéma et confronter cette analyse aux mouvements du mécanisme réel.



Exemple : schéma cinématique minimal d'un serre-joint

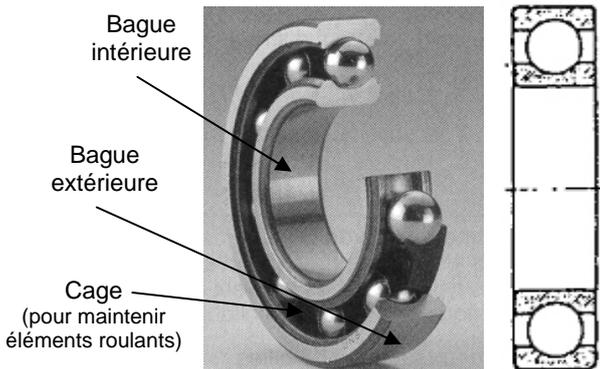
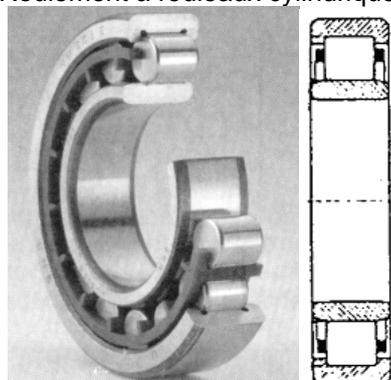
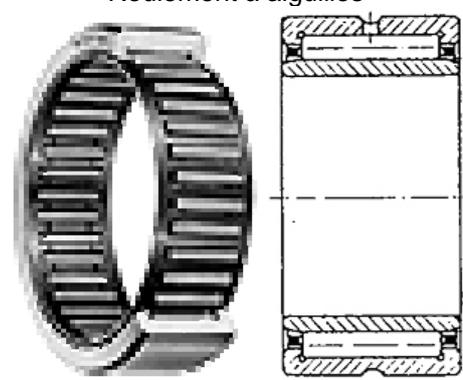
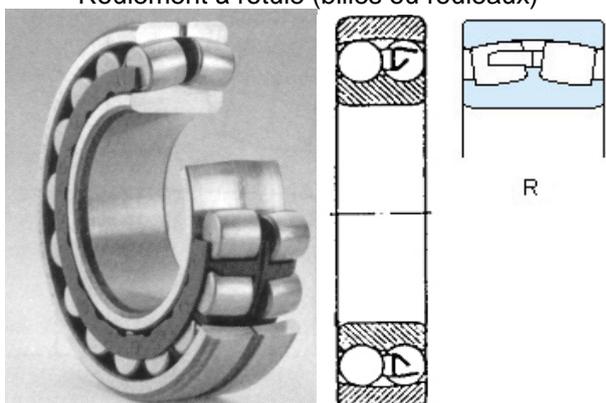
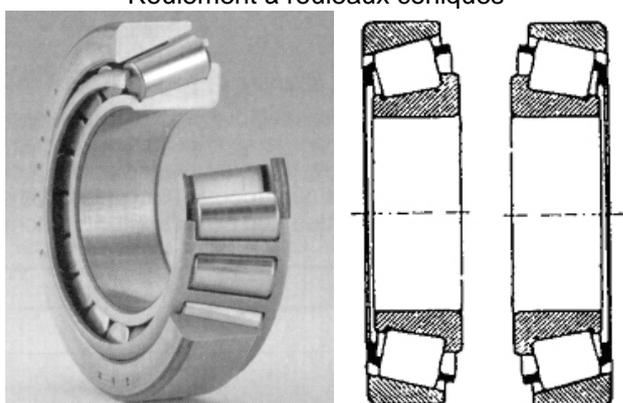
4) Les liaisons sur éléments roulants.

Certaines liaisons dans les mécanismes n'utilisent pas le principe du glissement des surfaces de contact, mais celui de l'interposition d'éléments roulants. Des composants mécaniques particuliers permettent alors de réaliser la plupart des liaisons normalisées (sauf la liaison encastrement et la liaison rotule à doigt).

41) Les roulements à billes, à rouleaux ou à aiguilles.

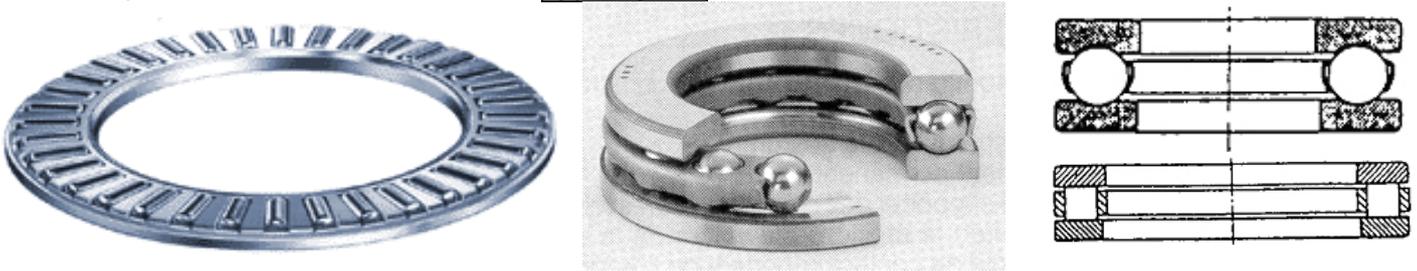
En fonction des indications de comportement fournies par les constructeurs (rotulage maxi), on peut modéliser la liaison entre bague intérieure et bague extérieure des différents roulements par des liaisons pivot, pivot glissant, rotule ou linéaire annulaire.

En effet, **si le rotulage maxi > 5° alors on suppose que les rotations suivant les axes secondaires sont possibles.**

<p style="text-align: center;">Roulement à billes</p>  <p>Le plus souvent le rotulage > 5° ⇒ rotule Mais parfois le rotulage < 5° ⇒ pivot</p>	<p style="text-align: center;">Roulement à deux rangées de billes</p>  <p>Le plus souvent le rotulage < 5° ⇒ pivot Mais parfois le rotulage > 5° ⇒ rotule</p>
<p style="text-align: center;">Roulement à rouleaux cylindriques</p>  <p>Le plus souvent le rotulage > 5° ⇒ linéaire annulaire Mais parfois le rotulage < 5° ⇒ pivot glissant</p>	<p style="text-align: center;">Roulement à aiguilles</p>  <p>Le plus souvent le rotulage < 5° ⇒ pivot glissant Mais parfois le rotulage > 5° ⇒ linéaire annulaire</p>
<p style="text-align: center;">Roulement à rotule (billes ou rouleaux)</p>  <p>Le rotulage est toujours > 5° ⇒ rotule</p>	<p style="text-align: center;">Roulement à rouleaux coniques</p>  <p>Le plus souvent le rotulage > 5° ⇒ rotule Mais parfois le rotulage < 5° ⇒ pivot</p>

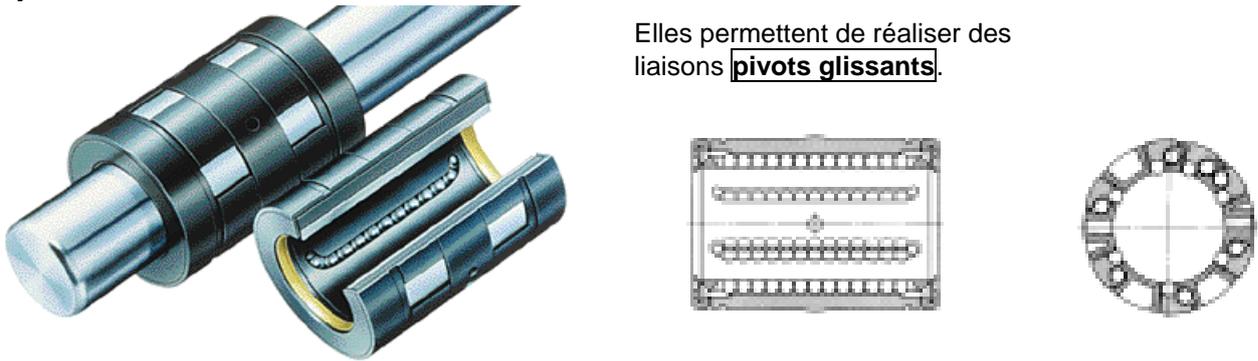
42) Les butées à billes ou à rouleaux.

Elles permettent de réaliser des liaisons **appuis plans**.



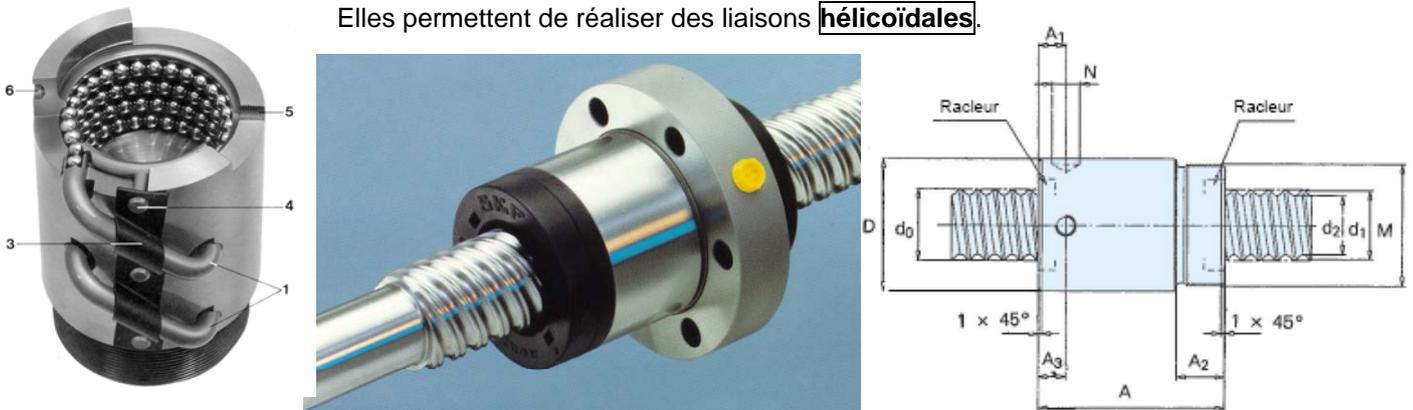
43) Les douilles à billes ou à rouleaux.

Elles permettent de réaliser des liaisons **pivots glissants**.



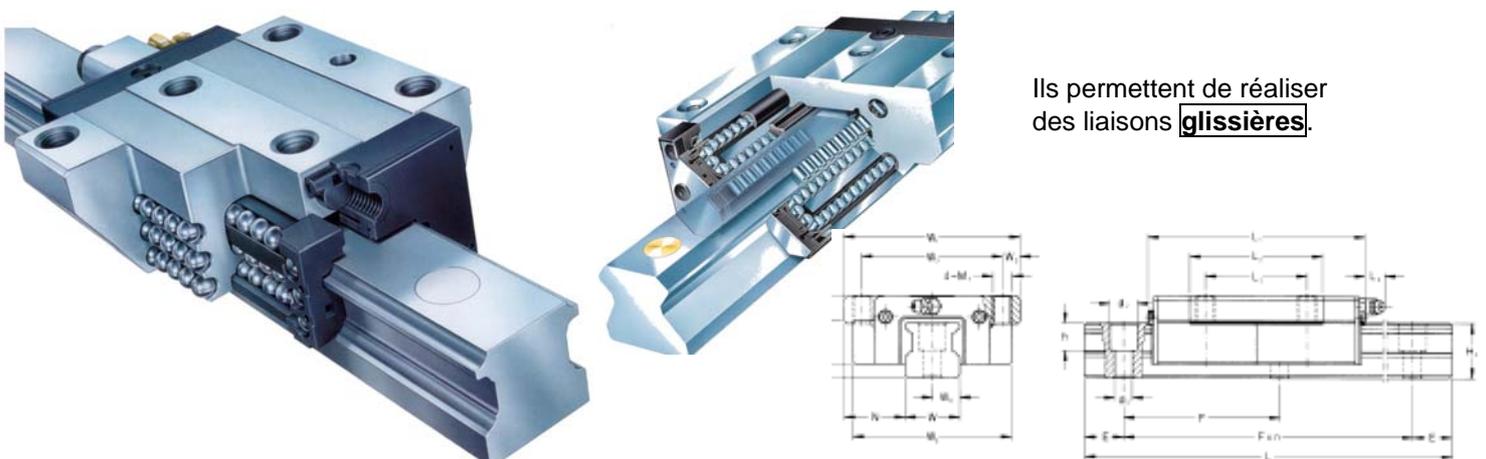
44) Les vis à billes ou à rouleaux.

Elles permettent de réaliser des liaisons **hélicoïdales**.



45) Les guidages à billes ou à rouleaux sur rails.

Ils permettent de réaliser des liaisons **glissières**.

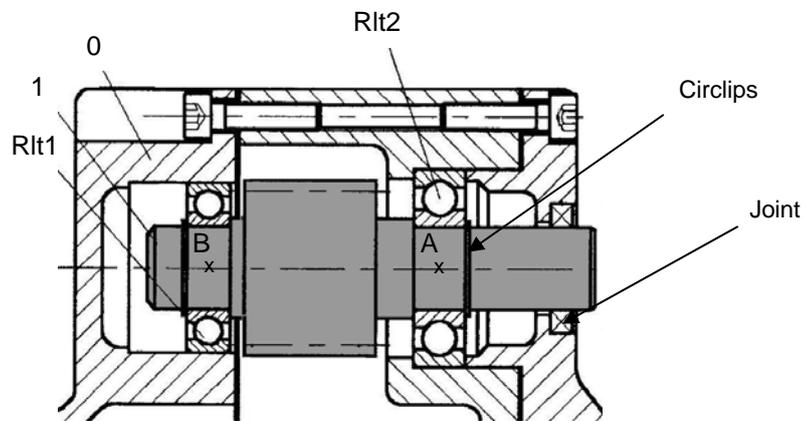


5) Graphe de structure et schéma d'architecture.

51) Différence entre schéma cinématique et schéma d'architecture.

	Schéma cinématique	Schéma d'architecture
Permet de visualiser	la cinématique du mécanisme (c'est à dire les mouvements relatifs des différentes classes d'équivalence)	l'architecture du mécanisme (c'est-à-dire la disposition des liaisons) ⇒ il colle à la réalité technologique puisqu'il tient compte du choix des constituants adoptés
Est construit à partir du	graphe de liaison	graphe de structure

52) Exemple : Liaison entre un arbre 1 et un bâti 0 réalisée par l'association de 2 roulements.



Utilisation de deux roulements à billes situés à chaque extrémité de l'arbre 1, modélisables, l'un par une liaison rotule et l'autre par une liaison linéaire annulaire.

Graphe de liaison :

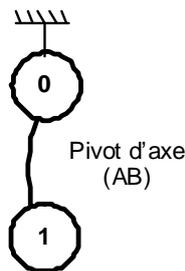
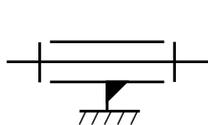


Schéma cinématique minimal :



Graphe de structure :

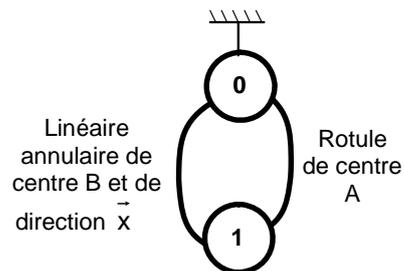
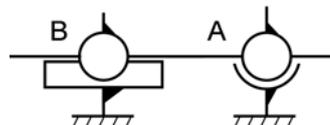


Schéma d'architecture :



Sur le graphe de structure et le schéma d'architecture, figurent toutes les liaisons élémentaires (ou locales) (se situant dans les zones de guidage).

6) Liaisons cinématiquement équivalentes.

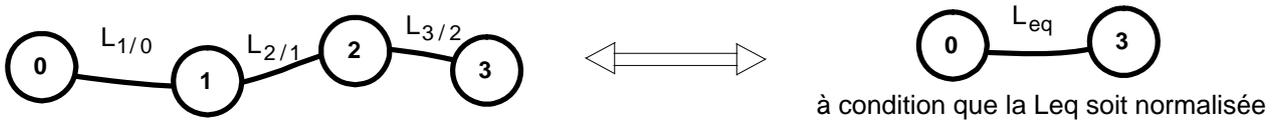
61) Définition d'une liaison équivalente.

Lors d'une approche globale, afin de simplifier la modélisation d'un mécanisme, on peut être amené à chercher des liaisons fictives équivalentes à un ensemble de liaisons réelles. Cette recherche peut se faire analytiquement par les torseurs cinématiques ou intuitivement avec l'expérience.

NB : La liaison fictive équivalente est une liaison qui a le même comportement que l'association des liaisons réelles, c'est à dire qu'elle transmet la même action mécanique et qu'elle autorise le même mouvement.

Deux types de configuration peuvent se rencontrer : en série ou en parallèle.

62) Liaisons en série.

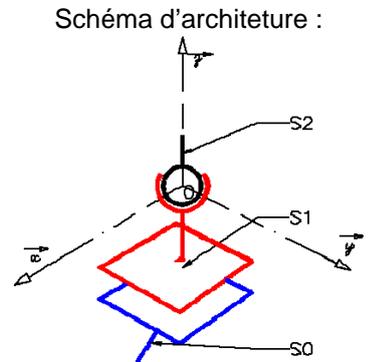
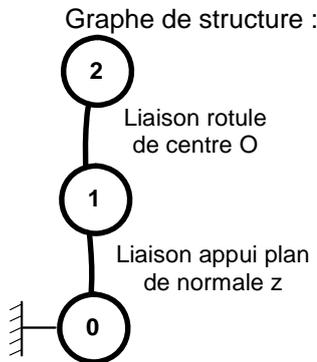
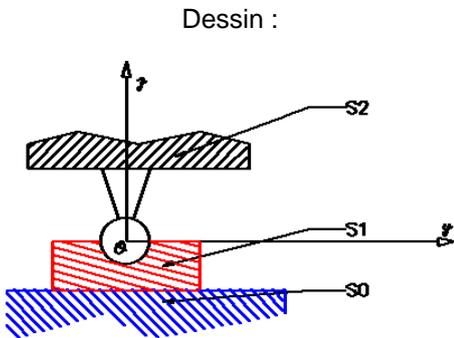


La liaison L_{eq} est identifiée à partir de son torseur cinématique associé.

$$\{V_{L_{eq}}\} = \{V_{3/0}\} = \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\}$$

par la relation de composition des mouvements

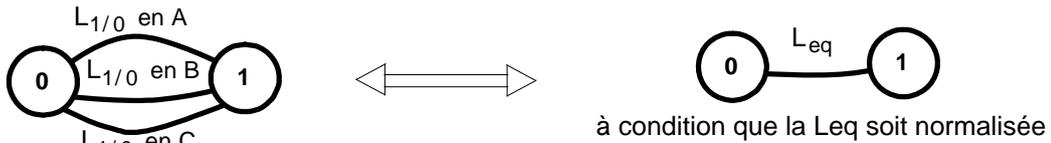
Exemple : Patin à rotule



$$\left. \begin{aligned} \{V_{2/1}\} &= \begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & 0 \\ \omega_{y,2/1} & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{(x,\bar{y},\bar{z})} \\ \text{et} \\ \{V_{1/0}\} &= \begin{Bmatrix} 0 & v_{x,O \in 1/0} \\ 0 & v_{y,O \in 1/0} \\ \omega_{z,1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(x,\bar{y},\bar{z})} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & v_{x,O \in 1/0} \\ \omega_{y,2/1} & v_{y,O \in 1/0} \\ \omega_{z,2/1} + \omega_{z,1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(x,\bar{y},\bar{z})} \Rightarrow \text{équiv. à une liaison ponctuelle de normale } z$$

NB : Technologiquement parlant, il est donc préférable de réaliser une liaison ponctuelle par mise en série d'une liaison appui plan et d'une liaison rotule pour limiter la pression de contact. En effet, on passe d'un contact ponctuel, où la pression est infinie ($F=p \cdot S$), à un contact surfacique, où la pression devient admissible pour les matériaux.

63) Liaisons en parallèle.



La liaison Leq est identifiée à partir de son torseur cinématique associé.

$$\{V_{Leq}\} = \{V_{1/0}\} = \{V_{1/0}^{LA}\} = \{V_{1/0}^{LB}\} = \{V_{1/0}^{LC}\}$$

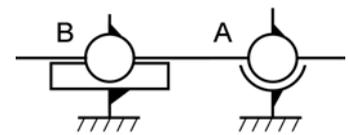
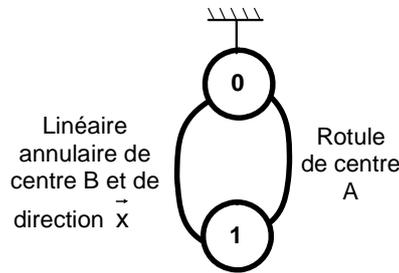
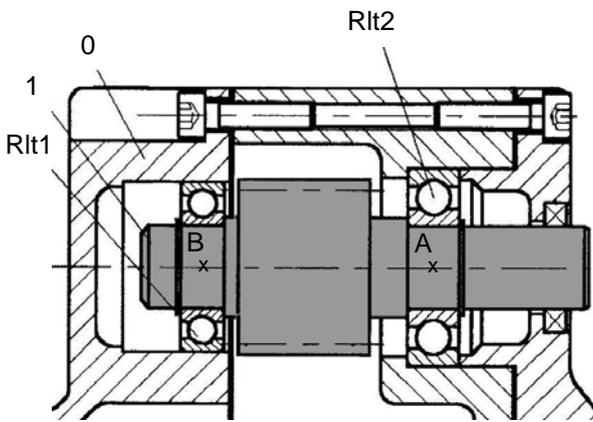
La compatibilité cinématique des n liaisons en parallèle avec la liaison équivalente, s'exprime par une identité des composantes de tous ces torseurs réduits au même point.

Exemple : Liaison entre un arbre 1 et un bâti 0 réalisée par l'association de 2 roulements.

Dessin :

Grphe de structure :

Schéma d'architecture :



On pose $\vec{AB} = a \cdot \vec{x}$

$$\{V_{1/0}^{LB}\}_B = \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{LB} & v_{x,B \in 1/0}^{LB} \\ \omega_{y,1/0}^{LB} & 0 \\ \omega_{z,1/0}^{LB} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{et} \quad \{V_{1/0}^{LA}\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{LA} & 0 \\ \omega_{y,1/0}^{LA} & 0 \\ \omega_{z,1/0}^{LA} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{LA} & 0 \\ \omega_{y,1/0}^{LA} & a \cdot \omega_{z,1/0}^{LA} \\ \omega_{z,1/0}^{LA} & -a \cdot \omega_{y,1/0}^{LA} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Car le changement de point (transfert au point B) pour la liaison en A donne :

$$\overrightarrow{V_{B \in 1/0}^{LA}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/0}^{LA}} + \vec{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}^{LA}} = \vec{0} + -a \cdot \vec{x} \wedge (\omega_{x,1/0}^{LA} \cdot \vec{x} + \omega_{y,1/0}^{LA} \cdot \vec{y} + \omega_{z,1/0}^{LA} \cdot \vec{z}) = a \cdot \omega_{z,1/0}^{LA} \cdot \vec{y} - a \cdot \omega_{y,1/0}^{LA} \cdot \vec{z}$$

Or, comme les liaisons sont en parallèle : $\{V_{Leq}\} = \{V_{1/0}\} = \{V_{1/0}^{LB}\} = \{V_{1/0}^{LA}\}$

$$\text{donc : } \{V_{Leq}\} = \{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{LB} & v_{x,B \in 1/0}^{LB} \\ \omega_{y,1/0}^{LB} & 0 \\ \omega_{z,1/0}^{LB} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{LA} & 0 \\ \omega_{y,1/0}^{LA} & a \cdot \omega_{z,1/0}^{LA} \\ \omega_{z,1/0}^{LA} & -a \cdot \omega_{y,1/0}^{LA} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\begin{cases} \omega_{x,1/0}^{LB} = \omega_{x,1/0}^{LA} \\ \omega_{y,1/0}^{LB} = \omega_{y,1/0}^{LA} \\ \omega_{z,1/0}^{LB} = \omega_{z,1/0}^{LA} \\ v_{x,B \in 1/0}^{LB} = 0 \\ 0 = a \cdot \omega_{z,1/0}^{LA} \\ 0 = -a \cdot \omega_{y,1/0}^{LA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{x,1/0}^{LB} = \omega_{x,1/0}^{LA} \\ \omega_{y,1/0}^{LB} = \omega_{y,1/0}^{LA} = 0 \\ \omega_{z,1/0}^{LB} = \omega_{z,1/0}^{LA} = 0 \\ v_{x,B \in 1/0}^{LB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \{V_{Leq}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \Rightarrow \text{Schéma d'un pivot}$$

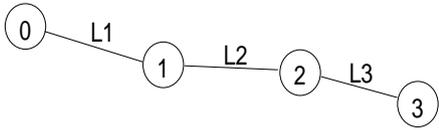
équivalent à une liaison pivot d'axe (B, \vec{x})

7) Loi entrée-sortie d'un mécanisme.

71) Chaînes de solides ouverte, fermée et complexe.

Chaîne ouverte.

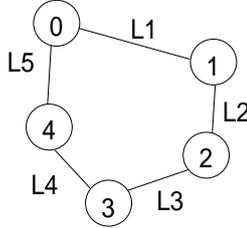
Une chaîne de solides 0, 1, 2... est ouverte si les solides des extrêmes sont différents.



L'exemple type est le robot :
Le premier solide étant le bâti et le dernier, la pince.

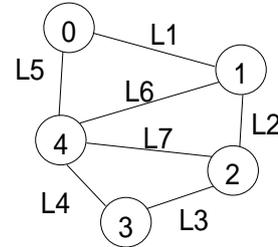
Chaîne fermée.

Une chaîne de solides 0, 1, 2... est fermée si le solide initial est le même que le solide final.



Chaîne complexe.

Une chaîne de solides 0, 1, 2... est complexe si elle comporte plusieurs chaînes ouvertes ou fermées.



72) Définition d'une loi entrée-sortie.

Une loi "entrée-sortie" est la **relation entre les paramètres de situation (position et orientation)** de la pièce d'entrée et les paramètres de situation de la pièce de sortie du mécanisme ou leurs dérivées.

Dans l'exemple de la pompe, la pièce d'entrée est l'arbre, et la pièce de sortie le piston.

La loi entrée-sortie est donc la relation entre la vitesse de rotation de l'arbre et la vitesse de translation du piston.

73) Détermination d'une loi E/S.

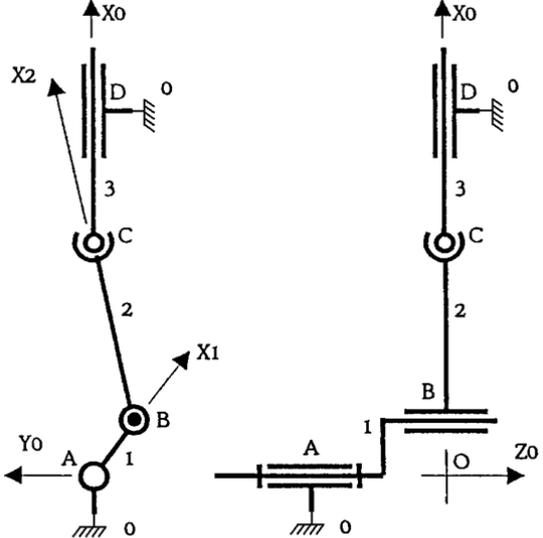
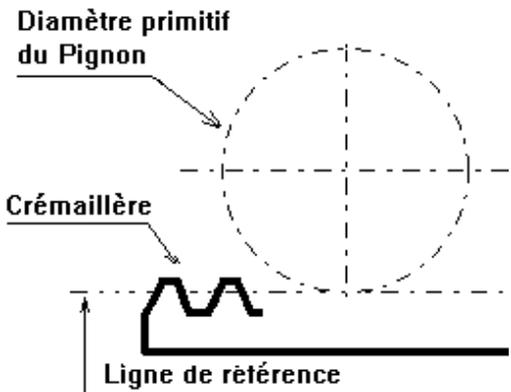
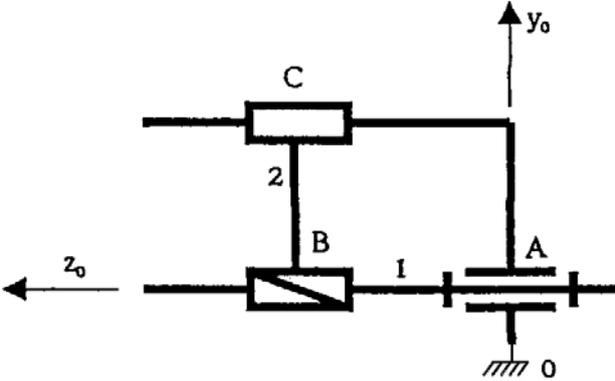
	Typologie	Méthode	Obtention	Pour aller + loin
Chaîne ouverte	Cours 05 – Cinématique du solide.	Cinématique analytique ou graphique. Exemples : Bras de robot, vérin, manège, presse, lève-glace, hayon de véhicule...		
	Fermeture géométrique liant les paramètres de position.	Écrire la relation vectorielle de fermeture de la chaîne : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \dots + \vec{PA} = \vec{0}$	Ce qui nous donne en projetant cette équation : - 3 équations scalaires pour un mécanisme spatial, - 2 équations scalaires pour un mécanisme plan.	En dérivant ces équations, il est possible d'établir des relations entre les vitesses.
	Fermeture géométrique liant les paramètres d'orientation.	- 1 équation scalaire pour un mécanisme plan, obtenue par : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \dots + (\vec{x}_n, \vec{x}_0) = 0$ - 1 équation scalaire pour un mécanisme spatial, obtenue par l'intermédiaire d'un produit scalaire : $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \text{constant} \quad (0 \text{ si ce sont 2 vecteurs orthogonaux}).$ Cette équation traduit la valeur d'un angle constant entre deux vecteurs de base (en général ceux qui sont orthogonaux), imposé par certaines liaisons (exemple du joint de cardan).		
Fermeture cinématique	Écrire la relation de composition des mouvements : $\{\vec{V}_{n/0}\} = \{\vec{V}_{n/n-1}\} + \dots + \{\vec{V}_{2/1}\} + \{\vec{V}_{1/0}\}$ Il faudra écrire en ligne les torseurs cinématiques des liaisons. Puis, choisir la bonne équation scalaire pour se débarrasser des paramètres indésirables...	Cette équation torsorielle permet d'écrire : - 6 équations scalaires pour un mécanisme spatial (3 liées aux vitesses linéaires et 3 liées aux vitesses angulaires). - 3 équations scalaires pour un mécanisme plan (2 liées aux vitesses linéaires et 1 liée aux vitesses angulaires).	En intégrant ces équations, il est possible d'établir des relations entre les positions. (En n'oubliant pas la constante d'intégration qui se détermine pour une position particulière).	

8) Les transformations de mouvements classiques.

Vous pouvez consulter le logiciel STM et le Dossier ressource dans le répertoire SII Elève sur le réseau.

NB : - Pour tous ces systèmes, le mouvement d'entrée est généralement continu, alors que le mouvement de sortie peut être, continu, alterné ou intermittent.

- Lorsque l'entrée et la sortie peuvent être permutées, on dit que le système est réversible.

81) Bielle-manivelle.	 <p>Pièce 1 : manivelle (ou maneton ou vilebrequin) Pièce 2 : bielle Pièce 3 : piston (ou coulisseau)</p>	<p>Transformation : Rotation continue en translation alternative (et réciproquement parfois).</p> <p>Réversibilité : parfois.</p> <p>Utilisation : Moteurs thermiques, compresseurs, certaines pompes et moteurs hydrauliques, marteau perforateur...</p> <p>NB : Dans un moteur thermique ou une pompe, le bâti au niveau du piston s'appelle chemise ou cylindre.</p> <p>Caractéristiques : $OB = e$ $BC = L$ Très souvent : $L \gg e$ ($L > 5.e$ suffit en général pour pouvoir faire cette hypothèse).</p> <p>Paramètres : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$ $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \beta$ $\vec{OC} = X.X_0$</p>
82) Pignon-crémaillère		<p>Transformation : Rotation continue en translation continue (et réciproquement).</p> <p>Réversibilité : toujours.</p> <p>Utilisation : Porte de TGV, porte de garage, direction de voiture, bras manipulateur...</p> <p>Caractéristiques : Diamètre du pignon.</p> <p>Paramètres : Angle de rotation du pignon, et position de la crémaillère.</p>
83) Vis-écrou.	 <p>Pièce 1 : vis Pièce 2 : coulisseau (ou écrou)</p>	<p>Transformation : Rotation continue en translation continue.</p> <p>Réversibilité : parfois. Elle dépend des matériaux en contact et de l'angle de l'hélice. Ce système est toujours réversible lorsque l'on a interposition d'éléments roulants limitant le frottement.</p> <p>Utilisation : Vérins électriques, chariots de machine outil, pilote automatique, élévateur...</p> <p>Caractéristiques : Pas de la vis : p (mm) à droite</p> <p>Paramètres : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta$ $\vec{AB} = \lambda.z_0$</p>

<p>84) Croix de Malte.</p>		<p>Transformation : Rotation continue en rotation intermittente.</p> <p>Réversibilité : jamais.</p> <p>Utilisation : Plateau tournant de machine de transfert, indexage...</p> <p>Caractéristiques : Angle entre les différentes rainures, et rayon de l'ergot.</p> <p>Paramètres : Angle de rotation de l'ergot, et angle de rotation de la croix.</p>
<p>85) Excentrique.</p>	<p>Pièce 1 : excentrique Pièce 2 : piston (ou coulisseau)</p>	<p>Transformation : Rotation continue en translation alternative.</p> <p>Réversibilité : jamais.</p> <p>Utilisation : Pompes hydrauliques, taille haie, certains mécanismes d'ablocage (blocage d'une pièce sur une table).</p> <p>Caractéristiques : $BC = R$ $OB = e$</p> <p>Paramètres : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta$ $\vec{OD} = X \cdot \vec{x}_0$ $\vec{CD} = \lambda \cdot \vec{y}_0$</p> <p><i>NB : L'excentrique est une came radiale circulaire</i></p>
<p>86) Came radiale.</p>		<p>Même principe que l'excentrique : L'excentrique qui était un disque est remplacée par une pièce de forme aléatoire (la came). Le schéma est identique au précédent mais avec R variable (mais connu).</p> <p>Utilisation : Pompes hydrauliques, certains mécanismes d'ablocage, arbre à cames de moteur, ferme-porte...</p>
<p>87) Came axiale.</p>	<p>Pièce 1 : came (ici un plateau incliné)</p> <p>La came peut être un cylindre sur lequel est usinée une rainure de forme quelconque.</p>	<p>Transformation : Rotation continue en translation alternative.</p> <p>Réversibilité : jamais.</p> <p>Utilisation : Pompes hydrauliques.</p> <p>Caractéristiques : $(\vec{x}_1, \vec{x}) = (\vec{y}_1, \vec{y}) = \alpha = \text{constant}$ $OD = R$</p> <p>Le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) définit le plateau.</p> <p>Paramètres : $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta$ $\vec{CD} = X \cdot \vec{x}_0$</p>

9) Les réducteurs et multiplicateurs de vitesse.

91) Rapport de transmission, de réduction et de multiplication.

Le rapport de transmission d'un système est : $i = \frac{\omega_e/0}{\omega_s/0}$ (avec 0 le bâti).

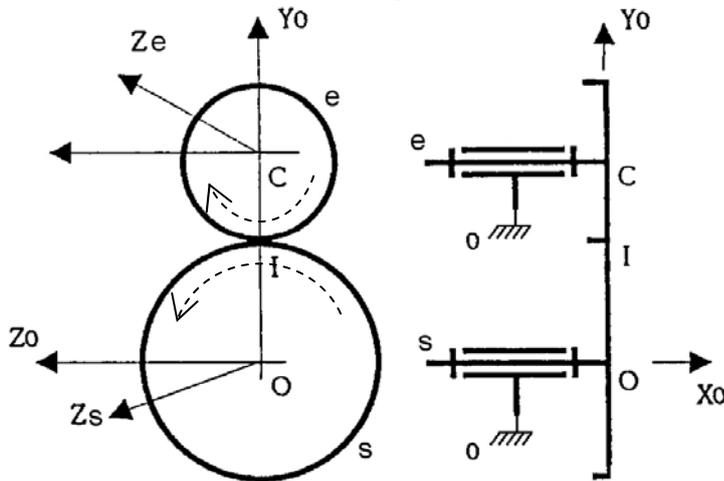
Un rapport de réduction ou de multiplication est toujours supérieur à 1. Ainsi, pour un réducteur, le rapport de réduction est i et pour un multiplicateur, le rapport de multiplication est $1/i$.

92) Transmission par adhérence : roues de friction.

Principe :

Deux roues cylindriques (ou coniques) sont en contact sur une génératrice et soumises à un effort presseur. Le frottement au contact des deux roues permet de transmettre une puissance de la roue motrice vers la roue réceptrice.

Il faut donc choisir des matériaux ayant un coefficient de frottement important.



Dénomination :

Pièce e : roue menante (entrée)
Pièce s : roue menée (sortie)

Utilisation :

Transmissions à faible puissance (petits appareils portables comme des baladeurs), ou dans des variateurs de vitesse.

Caractéristiques :

Les rayons des roues : R_e et R_s .

Paramètres :

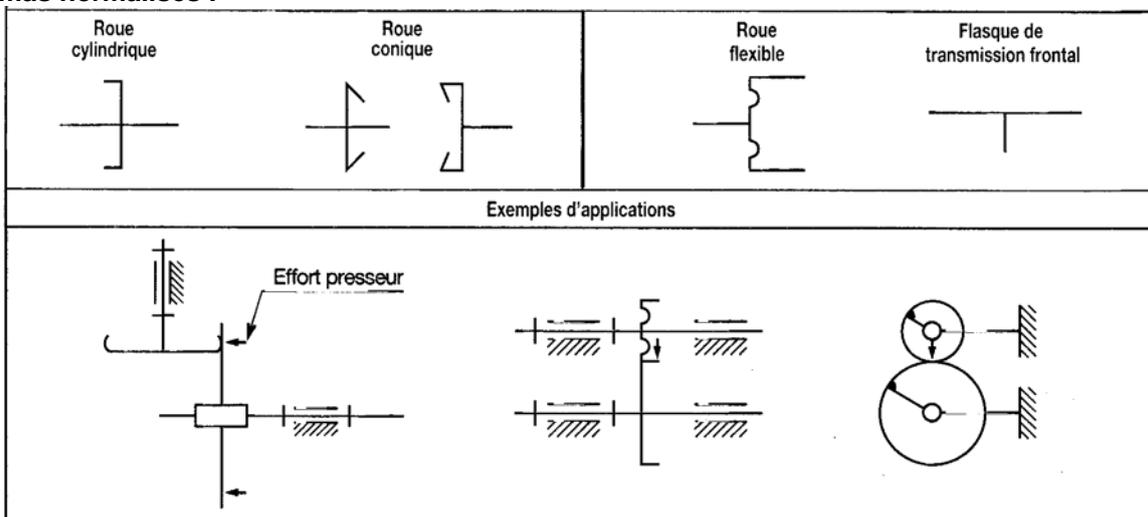
$$(\vec{z}_0, \vec{z}_e) = \alpha \quad (\vec{z}_0, \vec{z}_s) = \beta$$

La condition de roulement sans glissement en I (CIR de e/s) s'exprime par : $\vec{V}_{I \in s/e} = \vec{0}$ soit $\vec{V}_{I \in s/0} = \vec{V}_{I \in e/0}$

Donc $\omega_s/0 \cdot R_s = -\omega_e/0 \cdot R_e$ (car les roues ne tournent pas dans le même sens) (Nb : si $R_s > R_e$ alors $|\omega_s/0| < |\omega_e/0|$)

On en déduit le rapport de transmission $i = \frac{\omega_e/0}{\omega_s/0} = -\frac{R_s}{R_e} = -\frac{D_s}{D_e}$ (avec $\omega_e/0 = \dot{\alpha}$ et $\omega_s/0 = \dot{\beta}$)

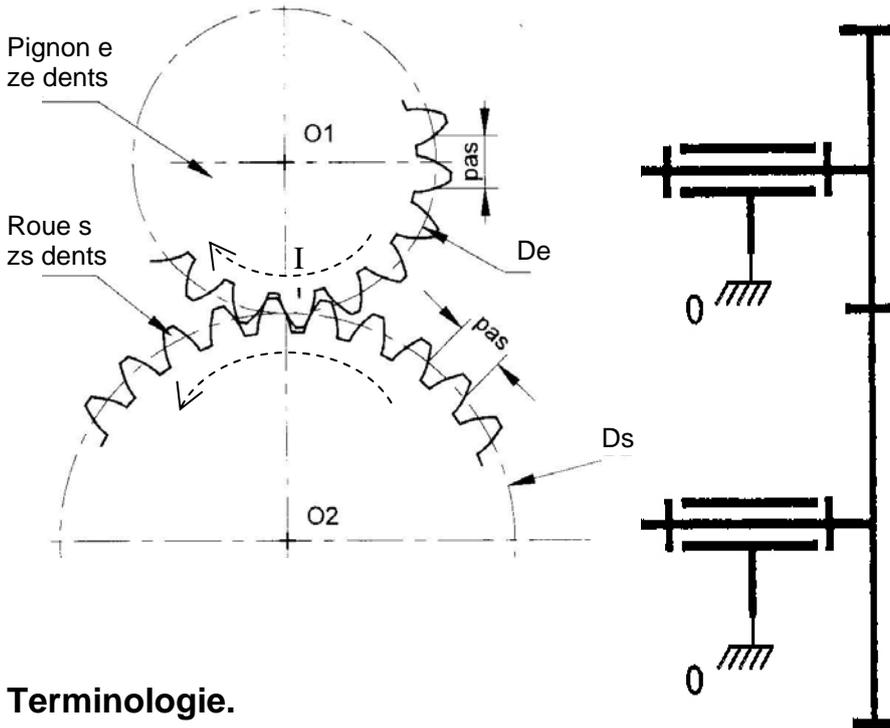
Schémas normalisés :



Cette solution reste limitée car elle nécessite des pressions de contact importantes pour assurer le roulement sans glissement en I.

Pour pallier cette difficulté, on réalise des transmissions par obstacle (voir paragraphe suivant).

93) Transmission par obstacle : engrenages.



Utilisation :

Tous les réducteurs : cela va du réveil à la boîte de vitesse de votre future voiture.

Caractéristiques :

Les rayons des roues dentées : R_e et R_s .

Paramètres :

Les angles définissant les positions angulaires de la roue et du pignon.

Terminologie.

Engrenage, pignon, roue et couronne.

Un engrenage est constitué de deux roues dentées. On appelle la petite le pignon et la grande la roue (ou couronne si c'est un engrenage intérieur).

Diamètres primitifs.

L'engrènement de dentures assure le roulement sans glissement en I des cercles fictifs de diamètres D_e et D_s . Ces cercles sont appelés cercles primitifs. Ils correspondent aux diamètres des roues de friction qui assureraient le même rapport de transmission.

Pas primitifs.

Pour garantir cet engrènement, les pas primitifs respectifs des dentures du pignon et de la roue, qui correspondent aux longueurs des arcs des cercles primitifs compris entre deux profils de dents consécutifs, doivent être égaux :

$$\text{pas} = \frac{2\pi \cdot R_e}{z_e} = \frac{2\pi \cdot R_s}{z_s} \quad (\text{où } z_e \text{ et } z_s \text{ sont les nombres de dents des roues de diamètre } D_e \text{ et } D_s).$$

On en déduit que : $\frac{R_e}{z_e} = \frac{R_s}{z_s}$ et donc aussi que $\frac{D_e}{z_e} = \frac{D_s}{z_s}$.

Module.

Ce dernier rapport caractérise l'aptitude à l'engrènement des diverses roues entre elles. Il est appelé module (symbolisé m).

Pour une roue donnée : $m = \frac{D}{z}$ (unité en mm) et $\text{pas} = \pi \cdot m$

Donc deux roues qui n'ont pas le même module ne peuvent pas engrener car leur pas est différent.

Rapport de transmission.

De la relation de roulement sans glissement du paragraphe précédent, on en déduit :

$$\text{le rapport de transmission } i = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{s/0}} = -\frac{R_s}{R_e} = -\frac{D_s}{D_e} = -\frac{z_s}{z_e}.$$

Différents types d'engrenages.

Engrenage cylindrique extérieur ou intérieur (à denture droite ou hélicoïdale).

Contact extérieur (avec son dessin normalisé)		Contact intérieur (avec son dessin normalisé)	
Denture droite	Denture hélicoïdale	Jumelé avec dentures hélicoïdales inversées	Denture à chevrons

⊙ Ils transmettent un mouvement entre deux arbres parallèles.

Cas particulier pour denture droite :

- ⊙ Ce sont les plus simples et les plus économiques. Comme leurs dents sont parallèles aux axes de rotation, ils peuvent admettre des déplacements axiaux.
- ⊙ Ils sont bruyants.

Cas particulier pour denture hélicoïdale :

NB : Les deux roues à denture hélicoïdale doivent avoir leurs hélices de sens opposés pour engrener ensemble.

- ⊙ Le nombre de couple de dents en prise étant plus important, l'engrènement est donc plus progressif et plus continu : ils sont donc plus silencieux et peuvent transmettre un effort plus important.
- ⊙ Employé seul, cet engrenage génère des efforts axiaux (pour compenser cet effort, on utilise un jumelage de 2 engrenages à dentures hélicoïdales inversées ou alors des roues à chevrons).

Engrenage conique (à denture droite ou hélicoïdale).

Denture droite	Denture hélicoïdale	Dessin normalisé

- ⊙ Ils transmettent un mouvement entre des arbres à axes concourants perpendiculaires ou non.
- ⊙ Les arbres sont en porte à faux. Ils génèrent des efforts axiaux. Les sommets des cônes doivent coïncider.

Engrenage à roue et vis sans fin (appelé aussi engrenage à vis).

Vis sans fin avec roue cylindrique	Vis sans fin avec roue creuse	Vis globique avec roue creuse	Dessin normalisé	
			Avec roue cylindrique	avec roue creuse

- ⊙ Transmission entre arbres à axes non concourants. Irréversibilité possible ⇒ sécurité anti-retour (utile quand le récepteur peut devenir moteur : exemple : appareils de levage). Grand rapport de réduction (entre 5 et 150).
- ⊙ L'engrènement se fait avec beaucoup de glissement entre les dentures, donc usure, et rendement faible (60%). La vis supporte un effort axial important. Afin d'augmenter la surface de contact des dentures, on utilise très souvent des systèmes à roue creuse. (ou mieux encore une vis globique, mais le coût de la vis est important).

Schémas normalisés.

ENGRENAGES					
		Types de dentures*			
		Droite	Hélicoïdale	Chevron	Spirale
Roue à denture extérieure					
Roue à denture intérieure					
		* Indication facultative.			
Exemples d'applications					
Roue cônica					
Secteur denté					
Vis sans fin					
Crémaillère					Pour une roue creuse

NB : Les cercles représentés sur le schéma cinématique correspondent aux cercles primitifs des roues.

Réducteurs ou multiplicateurs de vitesse à train simple.

Pour augmenter le rapport de réduction ou de multiplication, on peut associer plusieurs engrenages en série. On parle alors de trains d'engrenages.

Lorsque les axes des différentes roues ont tous une position invariable par rapport au bâti, on parle de « **train simple** ».

On qualifie de « **train épicycloïdal** » une configuration où l'un des axes des différentes roues a une position variable par rapport au bâti au cours du fonctionnement (voir paragraphe suivant).

Exemples courants de réducteurs ou multiplicateurs de vitesse à train simple :

2 engrenages extérieurs	3 engrenages extérieurs	1 engr. extérieur + 1 engr. intérieur
$i = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{s/0}} = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{2/0}} \cdot \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{s/0}} = \left(-\frac{z_2'}{z_e}\right) \cdot \left(-\frac{z_s}{z_2''}\right)$	$i = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{s/0}} = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{2/0}} \cdot \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} \cdot \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{s/0}} = \left(-\frac{z_2'}{z_e}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2''}\right) \cdot \left(-\frac{z_s}{z_3}\right)$	$i = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{s/0}} = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{2/0}} \cdot \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{s/0}} = \left(-\frac{z_2'}{z_e}\right) \cdot \left(\frac{z_s}{z_2''}\right)$

De ces 3 exemples, on peut déduire que le rapport de transmission peut être déterminé à l'aide de la relation suivante, où **n correspond au nombre de contacts ou engrenages extérieurs** entre roues :

$$i = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{s/0}} = (-1)^n \cdot \frac{\text{Produit du nombre de dents des roues menées}}{\text{Produit du nombre de dents des roues menantes}}$$

Le $(-1)^n$ donne le sens de rotation entre les axes d'entrée et de sortie (il est donc utilisé **seulement si** ces axes sont parallèles)

Dans un engrenage, on qualifie de « **roue menante** » une roue motrice, et de « **roue menée** » une roue réceptrice. Dans le 2^{ème} exemple, on qualifie la roue 3 de « **roue folle** ». Cette roue est à la fois menante (de la roue s) et menée (par la roue 2''), son rôle est de changer le sens de rotation.

Réducteurs ou multiplicateurs de vitesse à train épicycloïdal.

Inconvénients des trains simples.

Le rapport de réduction ou multiplication pour un seul couple de roues dentées est généralement limité à 7 pour des raisons d'encombrement et de vitesses circonférentielles.

De plus, les arbres d'entrée et de sortie ne sont pas alignés.

⇒ d'où la nécessité d'utiliser plusieurs étages (train simple) mais cela devient rapidement encombrant et lourd.

Inconvénients des engrenages à roue et vis sans fin.

Le rapport de réduction ou multiplication d'un engrenage à roue et vis sans fin peut atteindre 150, malheureusement son rendement n'excède pas les 60%.

De plus, les arbres d'entrée et de sortie ne sont pas alignés.

Définitions d'un train épicycloïdal.

Un train épicycloïdal est composé "d'organes rotatifs" dont au moins un élément "le satellite" est susceptible de prendre deux mouvements de rotation indépendants : une rotation autour de son axe (rotation propre) et une rotation par rapport à l'axe général du système.

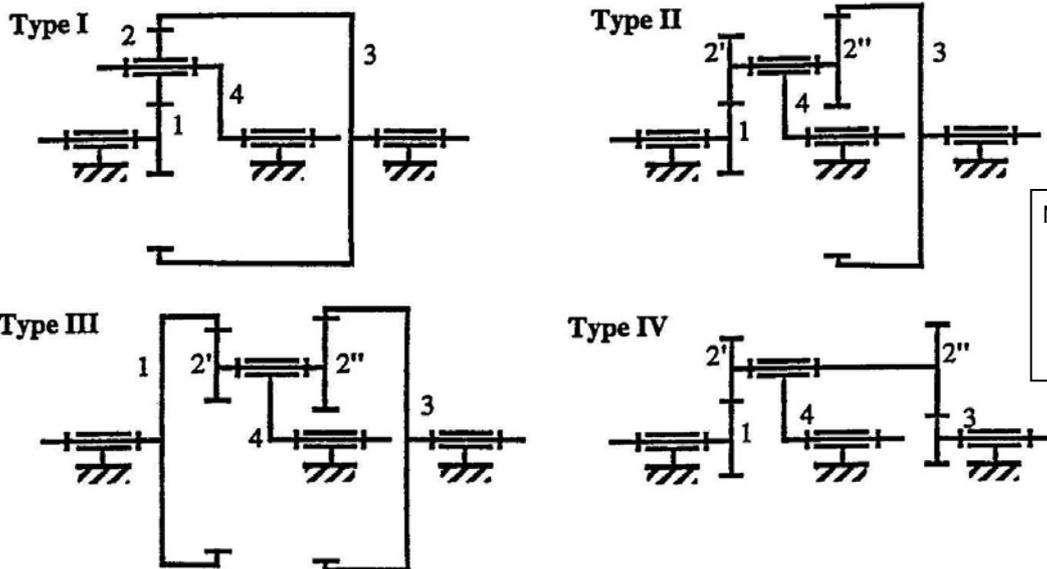
Trains épicycloïdaux plan et sphérique.

Un train épicycloïdal est dit plan lorsque tous les axes sont parallèles : ce sont la majorité des trains (ex : roue de camion, treuil, motoréducteur...).

Un train épicycloïdal est dit sphérique si tous les axes sont concourants (eng. conique) (ex : différentiel de voiture).

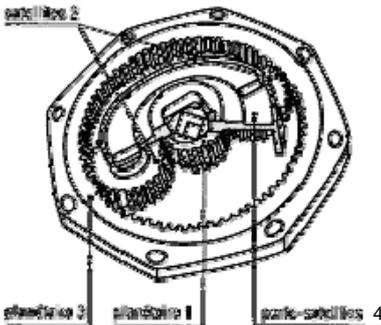
Planétaires, satellites et porte satellite.

Les différents types de trains épicycloïdaux sont présentés ci-dessous. Les éléments 1 et 3 sont appelés planétaires, les éléments 2 sont les satellites, et 4 est le porte satellite.

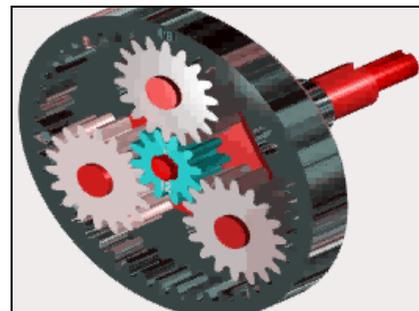


NB : Dans les trains épicycloïdaux de type II, III et IV le satellite 2 est appelé satellite double.

Train épicycloïdal de type I avec deux satellites 2



Train épicycloïdal de type I avec trois satellites 2



Condition géométrique entraînant une relation sur le nombre de dents des différents éléments.

Exemple pour un train épi. de type I : $D_3 = D_1 + 2.D_2 \Rightarrow z_3 = z_1 + 2.z_2$

Exemple pour un train épi. de type II : $R_1 + R_2 + R_{2''} = R_3 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_{2''} = z_3$

Si et seulement si les modules des 2 engrenages sont égaux.

Disposition la plus fréquente.

L'utilisation de plusieurs satellites (voir exemples précédents) ne change en rien la cinématique, mais supprime les efforts radiaux sur les arbres et réduit les efforts sur les dentures. Mais le système est fortement hyperstatique, il faut donc utiliser des solutions constructives adéquates.

Sur un train épicycloïdal, les planétaires ou le porte satellite peuvent être l'arbre d'entrée ou de sortie.

Mais généralement le rendement d'un train épicycloïdal dont le porte satellite tourne est meilleur, ainsi pour la majorité des réducteurs à train épicycloïdal, celui-ci sera de type I avec le planétaire intérieur comme entrée, le porte satellite la sortie, et le planétaire extérieur fixe.

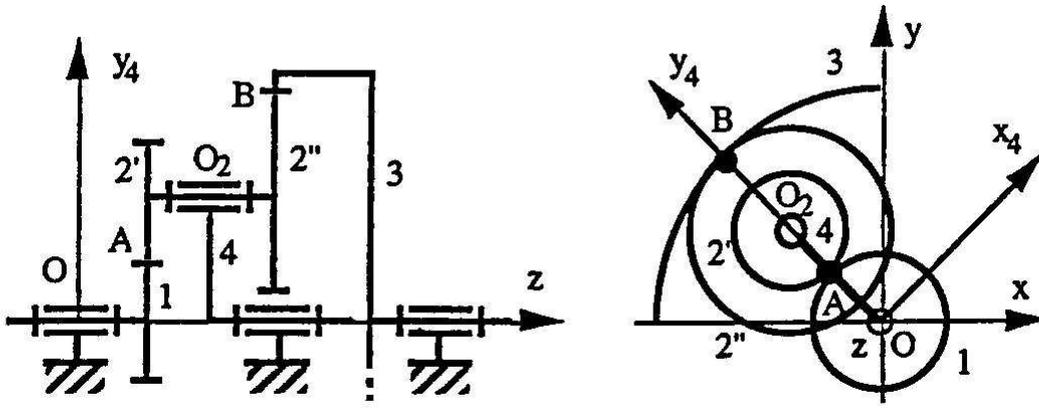
Avantages des trains épicycloïdaux.

Par rapport aux trains d'engrenages simples, les trains épicycloïdaux ont l'arbre d'entrée et de sortie alignés, et des rapports de réduction ou multiplication élevés.

La mise en série de plusieurs trains épicycloïdaux permet d'obtenir de plus grands rapports avec un encombrement relativement faible (ex : galet freineur et réducteur du portail au labo).

Relation cinématique : Relation de Willis.

Prenons l'exemple d'un train de type II :



Les vecteurs rotation sont tous portés par l'axe z.

Dans la suite nous noterons z_i le nombre de dents et R_i le rayon primitif de fonctionnement du pignon i.

Traduisons le non glissement au point A : $\vec{V}_{A \in 1/2} = \vec{0}$

$$\vec{V}_{A \in 1/2} = \vec{V}_{A \in 1/0} + \vec{V}_{A \in 0/4} + \vec{V}_{A \in 4/2} = \vec{0}$$

$$\text{avec } \begin{aligned} \vec{V}_{A \in 1/0} &= \vec{V}_{O \in 1/0} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -R_1 \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{1/0} \cdot \vec{z} = -R_1 \cdot \omega_{1/0} \cdot \vec{x}_4 \\ \vec{V}_{A \in 0/4} &= \vec{V}_{O \in 0/4} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{0/4} = -R_1 \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{0/4} \cdot \vec{z} = -R_1 \cdot \omega_{0/4} \cdot \vec{x}_4 \\ \vec{V}_{A \in 4/2} &= \vec{V}_{O_2 \in 4/2} + \vec{AO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{4/2} = R_2 \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{4/2} \cdot \vec{z} = R_2 \cdot \omega_{4/2} \cdot \vec{x}_4 \end{aligned}$$

$$\text{donc } (-R_1 \cdot \omega_{1/0} - R_1 \cdot \omega_{0/4} + R_2 \cdot \omega_{4/2}) \cdot \vec{x}_4 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -R_1 \cdot \omega_{1/0} - R_1 \cdot \omega_{0/4} + R_2 \cdot \omega_{4/2} = 0$$

Traduisons le non glissement au point B : $\vec{V}_{B \in 3/2} = \vec{0}$

$$\vec{V}_{B \in 3/2} = \vec{V}_{B \in 3/0} + \vec{V}_{B \in 0/4} + \vec{V}_{B \in 4/2} = \vec{0}$$

$$\text{avec } \begin{aligned} \vec{V}_{B \in 3/0} &= \vec{V}_{O \in 3/0} + \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = -R_3 \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{3/0} \cdot \vec{z} = -R_3 \cdot \omega_{3/0} \cdot \vec{x}_4 \\ \vec{V}_{B \in 0/4} &= \vec{V}_{O \in 0/4} + \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{0/4} = -R_3 \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{0/4} \cdot \vec{z} = -R_3 \cdot \omega_{0/4} \cdot \vec{x}_4 \\ \vec{V}_{B \in 4/2} &= \vec{V}_{O_2 \in 4/2} + \vec{BO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{4/2} = -R_2 \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{4/2} \cdot \vec{z} = -R_2 \cdot \omega_{4/2} \cdot \vec{x}_4 \end{aligned}$$

$$\text{donc } (-R_3 \cdot \omega_{3/0} - R_3 \cdot \omega_{0/4} - R_2 \cdot \omega_{4/2}) \cdot \vec{x}_4 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -R_3 \cdot \omega_{3/0} - R_3 \cdot \omega_{0/4} - R_2 \cdot \omega_{4/2} = 0$$

On se retrouve avec un système à 2 équations :

$$\begin{cases} -R_1 \cdot \omega_{1/0} - R_1 \cdot \omega_{0/4} + R_2' \cdot \omega_{4/2} = 0 \\ -R_3 \cdot \omega_{3/0} - R_3 \cdot \omega_{0/4} - R_2'' \cdot \omega_{4/2} = 0 \end{cases}$$

Pour supprimer $\omega_{4/2}$ (vitesse que l'on ne connaît pas), on multiplie la 1^{ère} équation par R_2'' et la 2^{ème} par R_2' :

$$\begin{cases} -R_2'' \cdot R_1 \cdot \omega_{1/0} - R_2'' \cdot R_1 \cdot \omega_{0/4} + R_2'' \cdot R_2' \cdot \omega_{4/2} = 0 \\ -R_2' \cdot R_3 \cdot \omega_{3/0} - R_2' \cdot R_3 \cdot \omega_{0/4} - R_2' \cdot R_2'' \cdot \omega_{4/2} = 0 \end{cases}$$

Et on additionne :

$$-R_2'' \cdot R_1 \cdot \omega_{1/0} - R_2' \cdot R_3 \cdot \omega_{3/0} - (R_2'' \cdot R_1 + R_2' \cdot R_3) \cdot \omega_{0/4} = 0$$

Soit :

$$-R_2'' \cdot R_1 \cdot \omega_{1/0} - R_2' \cdot R_3 \cdot \omega_{3/0} + (R_2'' \cdot R_1 + R_2' \cdot R_3) \cdot \omega_{4/0} = 0$$

En divisant par $-R_2'' \cdot R_1$ on obtient :

$$\omega_{1/0} + \frac{R_2' \cdot R_3}{R_2'' \cdot R_1} \cdot \omega_{3/0} + \left(-1 - \frac{R_2' \cdot R_3}{R_2'' \cdot R_1} \right) \cdot \omega_{4/0} = 0$$

D'autre part, on peut remarquer (par rapport au schéma de la page précédente) que si on fixe le porte satellite 4, le train épicycloïdal devient un train simple, de rapport de transmission : $\frac{\omega_{1/0}}{\omega_{3/0}} \Big|_{\omega_{4/0}=0} = -\frac{R_3 \cdot R_2'}{R_2'' \cdot R_1}$.

Posons λ ce rapport.

Par conséquent, on obtient (de notre équation précédente), la relation de Willis :

$$\omega_{1/0} - \lambda \cdot \omega_{3/0} + (\lambda - 1) \omega_{4/0} = 0 \quad \text{avec } \lambda = \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{3/0}} \Big|_{\omega_{4/0}=0}$$

En remplaçant les repères, **cette relation de Willis** peut s'écrire sous 2 formes différentes :

$$\omega_{\text{Pla.A}/0} - \lambda \cdot \omega_{\text{Pla.B}/0} + (\lambda - 1) \cdot \omega_{\text{Po.Sa}/0} = 0 \quad \text{avec } \lambda = \frac{\omega_{\text{Pla.A}/0}}{\omega_{\text{Pla.B}/0}} \Big|_{\omega_{\text{Po.Sa}/0}=0} \quad (1^{\text{ère}} \text{ forme : la plus pratique})$$

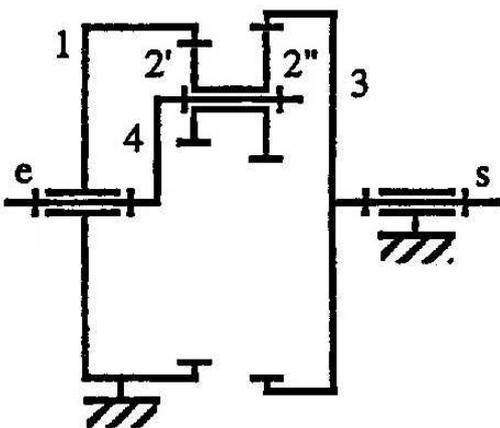
$$\text{ou } \frac{\omega_{\text{Pla.A}/0} - \omega_{\text{Po.Sa}/0}}{\omega_{\text{Pla.B}/0} - \omega_{\text{Po.Sa}/0}} = \lambda \quad \text{avec } \lambda = \frac{\omega_{\text{Pla.A}/0}}{\omega_{\text{Pla.B}/0}} \Big|_{\omega_{\text{Po.Sa}/0}=0} \quad (2^{\text{ème}} \text{ forme})$$

Où le paramètre λ appelé **raison de base du train** est une constante et correspond au rapport de transmission du train d'engrenage simple obtenu en immobilisant le porte satellite.

Remarque pour mieux retenir : la somme des coefficients de la 1^{ère} forme est nulle : $1 - \lambda + (\lambda - 1) = 0$

Exemple du réducteur ATV.

Ci-dessous le schéma cinématique du réducteur ATV (avec $z_1 = 166$, $z_2' = 160$, $z_2'' = 164$, et $z_3 = 170$).



La relation de Willis s'écrit : $\omega_{1/0} - \lambda \cdot \omega_{3/0} + (\lambda - 1) \omega_{4/0} = 0$

$$\text{avec } \lambda = \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{3/0}} \Big|_{\omega_{4/0}=0} = (-1)^0 \cdot \frac{z_2'}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2''} = 0,9991$$

Or $\omega_{1/0} = 0$, $3 = s$ et $4 = e$.

Ainsi la relation de Willis s'écrit : $0 - \lambda \cdot \omega_{s/0} + (\lambda - 1) \omega_{e/0} = 0$

$$\text{soit : } \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{s/0}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = -1133$$

c'est à dire un rapport de réduction très important.

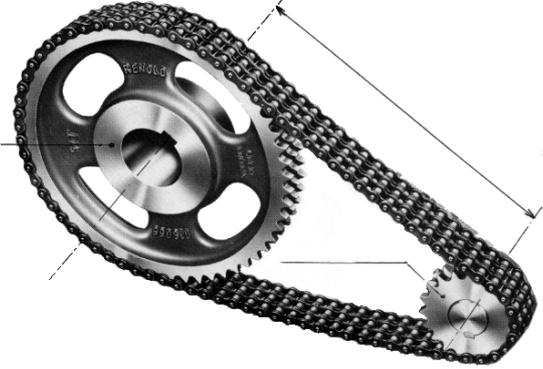
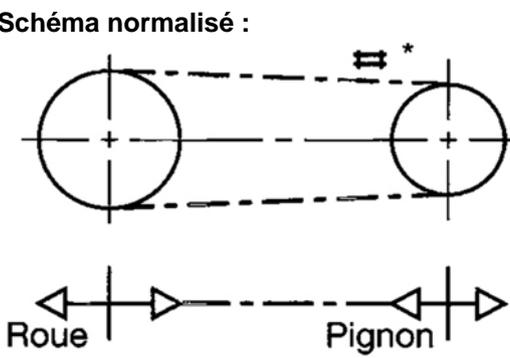
94) Les liens flexibles (pignons-chaîne, poulies-courroie)

Ils sont particulièrement avantageux lorsqu'il s'agit de relier de grands entraxes. Ils sont alors moins coûteux que les transmissions par engrenages.

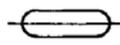
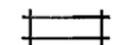
Ils sont utilisés dans tous secteurs de la construction mécanique (machines outils, convoyeurs, engins de travaux publics, moteurs ...).

NB : Attention les roues ou poulies tournent dans le même sens (contrairement aux engrenages).

Pignons-chaîne.

* Indication éventuelle du type de chaîne.

Maillons	
Rouleaux	
Dents	



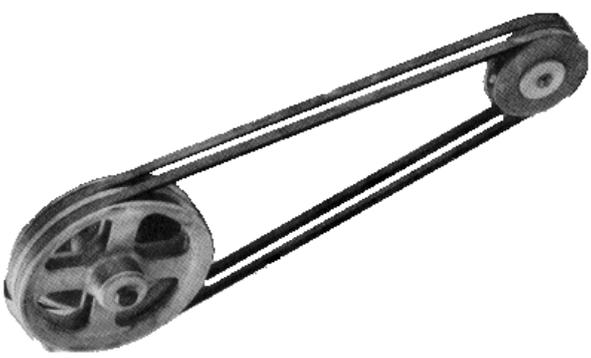
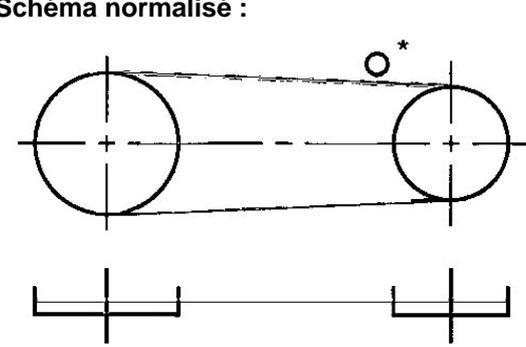

Pignon

Chaînes

Avantages et inconvénients :

- ☺ Transmission de couples très importants.
Aucun glissement.
Entraînement à rapport constant (indépendant du couple).
Les chaînes pouvant s'engager sur les pignons par leurs deux faces, le sens de rotation peut être inversé en interposant des galets intermédiaires.
- ☹ Bruyant et nécessite une lubrification.

Poulies-courroie.

* Indication éventuelle du type de courroie.

Plate	
Ronde	
Trapézoïdale	
Crantée	

La transmission de puissance par poulie-courroie se fait par l'intermédiaire de l'adhérence entre la courroie et la poulie.

Avantages et inconvénients :

- ☺ Rigidité en torsion assez faible, ceci permet leur utilisation lorsque les axes des poulies ne sont pas parallèles (possibilité d'utiliser des galets intermédiaires).
Solution économique.
Fonctionnement silencieux.
Amortissement des à-coups grâce à l'élasticité des courroies.
- ☹ Matériaux des courroies non adaptés à des conditions difficiles (température élevée par exemple).
Durée de vie limitée.
Nécessite une surveillance périodique en vue du remplacement de la courroie.
Glissement (sauf pour courroie crantée).