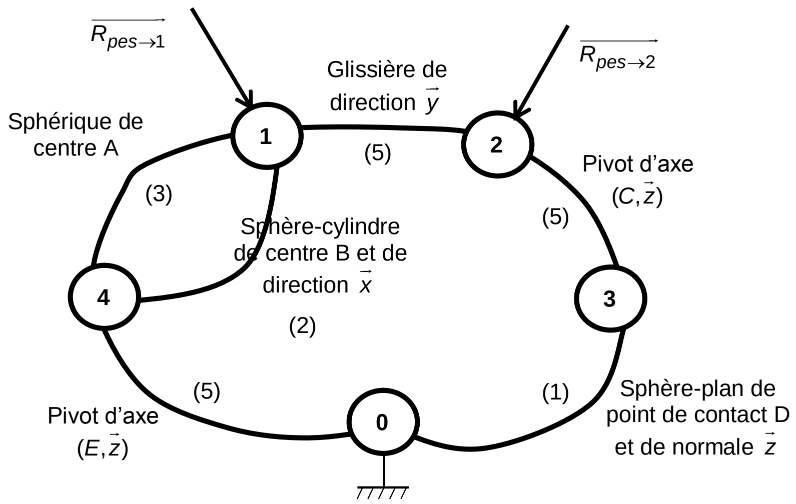
# Corrigé Exercice 1 : PASSERELLE TÉLESCOPIQUE D'AÉROPORT

**Question 1 :** *Réaliser le graphe de structure, puis compléter-le en vue d'une étude de statique.*




**Question 2 :** *Par quel(s) isolement(s) peut-on commencer ?*

Isolement à ne pas faire :
**- Ne jamais prendre le bâti dans un isolement.**
- Ne jamais prendre un isolement qui a plus de 6 inconnues de liaison (exemple {2} où on a 10 inconnues) car le PFS nous donne dans l'espace que 6 équations.
- Ne pas prendre un isolement qui n'inclue pas les données du sujet (ici $\overrightarrow{R_{pes\to1}}$ et $\overrightarrow{R_{pes\to2}}$) dans son calcul… (exemple {3}).

On peut donc débuter par :
Isoler {1, 2, 3}
Isoler {1, 2, 3, 4}

**Question 3 :** *Parmi ces isolements, lequel donnera moins de calcul ?*

Isoler {1, 2, 3, 4} $\Rightarrow$ 4 AME : $AM_{0\to4}$, $AM_{0\to3}$, $AM_{pes\to1}$ et $AM_{pes\to2}$

Isoler {1, 2, 3} $\Rightarrow$ 5 AME : $AM_{4\to1}^{LA}$, $AM_{4\to1}^{LB}$, $AM_{0\to3}$, $AM_{pes\to1}$ et $AM_{pes\to2}$

Ainsi, pour effectuer moins de calcul, il est préférable d'isoler le système qui comporte le moins d'AME, c'est-à-dire ici {1, 2, 3, 4}.

**Question 4 :** *Donner la suite d'isolement à effectuer pour pouvoir déterminer complètement toutes les actions transmissibles dans les liaisons.*

Méthode réfléchie (à réaliser au brouillon) :
Isoler {1, 2, 3, 4} $\Rightarrow$ $AM_{0\to4}$ et $AM_{0\to3}$
Isoler {4} $\Rightarrow$ $AM_{1\to4}^{LA}$ et $AM_{1\to4}^{LB}$
Isoler {1, 4} $\Rightarrow$ $AM_{2\to1}$ (NB : pour déterminer cette action, nous aurions pu aussi isoler {2, 3})
Isoler {3} $\Rightarrow$ $AM_{2\to3}$

**Question 5 :** *Résoudre vos différents isolements.*

1) Isolons {1, 2, 3, 4}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {1, 2, 3, 4}.
   - Action mécanique de 0 sur 4 (pivot d'axe $(E,\vec{z})$)
   - Action mécanique de 0 sur 3 (sphère-plan de point de contact D et de normale $\vec{z}$)
   - Action mécanique de la pesanteur sur 1
   - Action mécanique de la pesanteur sur 2

3) Modélisables par :

$$\left\{\mathrm{T}_{0\to4}\right\} = \underset{\forall P\in(E,\vec{z})}{\begin{Bmatrix} X_{0\to4} & L_{P,0\to4} \\ Y_{0\to4} & M_{P,0\to4} \\ Z_{0\to4} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathrm{T}_{0\to3}\right\} = \underset{\forall P\in(D,\vec{z})}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{0\to3} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{\mathrm{T}_{pes\to1}\right\} = \underset{\forall P\in(G_1,\vec{z})}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_1.g & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathrm{T}_{pes\to2}\right\} = \underset{\forall P\in(G_2,\vec{z})}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_2.g & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4) Résolution :

On détermine les moments au point E des 3 torseurs à transporter :

$$\overrightarrow{M_{E,0\to3}} = \overrightarrow{M_{C,0\to3}} + \overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{R_{0\to3}}$$
$$\overrightarrow{M_{E,0\to3}} = (h.\vec{z} + y_0.\vec{y}) \wedge (Z_{0\to3}.\vec{z})$$
$$\overrightarrow{M_{E,0\to3}} = y_0.Z_{0\to3}.\vec{x}$$

$$\overrightarrow{M_{E,pes\to1}} = \overrightarrow{M_{G_1,pes\to1}} + \overrightarrow{EG_1} \wedge \overrightarrow{R_{pes\to1}}$$
$$\overrightarrow{M_{E,pes\to1}} = (h.\vec{z} + d.\vec{y}) \wedge (-m_1.g.\vec{z})$$
$$\overrightarrow{M_{E,pes\to1}} = -d.m_1.g.\vec{x}$$

$$\overrightarrow{M_{E,pes\to2}} = \overrightarrow{M_{G_2,pes\to2}} + \overrightarrow{EG_2} \wedge \overrightarrow{R_{pes\to2}}$$
$$\overrightarrow{M_{E,pes\to2}} = (h.\vec{z} + y_0.\vec{y} + e.\vec{x}) \wedge (-m_2.g.\vec{z})$$
$$\overrightarrow{M_{E,pes\to2}} = -y_0.m_2.g.\vec{x} + e.m_2.g.\vec{y}$$

Donc :

$$\left\{\mathrm{T}_{0\to3}\right\} = \underset{E}{\begin{Bmatrix} 0 & y_0.Z_{0\to3} \\ 0 & 0 \\ Z_{0\to3} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathrm{T}_{pes\to1}\right\} = \underset{E}{\begin{Bmatrix} 0 & -d.m_1.g \\ 0 & 0 \\ -m_1.g & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathrm{T}_{pes\to2}\right\} = \underset{E}{\begin{Bmatrix} 0 & -y_0.m_2.g \\ 0 & e.m_2.g \\ -m_2.g & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Puis, on applique le PFS : $\sum\left\{\mathrm{T}_{\bar{S}\to S}\right\} = \{0\}$

$$\begin{cases} X_{0\to4} = 0 \\ Y_{0\to4} = 0 \\ Z_{0\to4} + Z_{0\to3} - m_1.g - m_2.g = 0 \\ L_{E,0\to4} + y_0.Z_{0\to3} - d.m_1.g - y_0.m_2.g = 0 \\ M_{E,0\to4} + e.m_2.g = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{0\to4} = Y_{0\to4} = 0 \\ Z_{0\to4} + Z_{0\to3} - m_1.g - m_2.g = 0 \\ L_{E,0\to4} + y_0.Z_{0\to3} - d.m_1.g - y_0.m_2.g = 0 \\ M_{E,0\to4} = -e.m_2.g \end{cases}$$

On remarque que l'on ne peut pas tout résoudre car 1 équation a donné 0=0…

1) Isolons {4}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {4}.
   - Action mécanique de 0 sur 4 (pivot d'axe $(E,\vec{z})$)
   - Action mécanique de 1 sur 4 en A (sphérique de centre A)
   - Action mécanique de 1 sur 4 en B (sphère-cylindre de centre B et de direction $\vec{x}$)

3) Modélisables par :

$$\{T_{0\to4}\} = {}_E\begin{Bmatrix} 0 & L_{E,0\to4} \\ 0 & -e.m_2.g \\ Z_{0\to4} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \{T_{1\to4}{}^{LA}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{1\to4}^{LA} & 0 \\ Y_{1\to4}^{LA} & 0 \\ Z_{1\to4}^{LA} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \{T_{1\to4}{}^{LB}\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to4}^{LB} & 0 \\ Z_{1\to4}^{LB} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4) Résolution :

On détermine les moments au point A des 2 torseurs à transporter :

$$\overrightarrow{M_{A,0\to4}} = \overrightarrow{M_{E,0\to4}} + \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{R_{0\to4}}$$
$$\overrightarrow{M_{A,0\to4}} = (L_{E,0\to4}.\vec{x} - e.m_2.g.\vec{y}) + (a.\vec{x} - h.\vec{z}) \wedge (Z_{0\to4}.\vec{z})$$
$$\overrightarrow{M_{A,0\to4}} = L_{E,0\to4}.\vec{x} - e.m_2.g.\vec{y} - a.Z_{0\to4}.\vec{y}$$

$$\overrightarrow{M_{A,1\to4}^{LB}} = \overrightarrow{M_{B,1\to4}^{LB}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{1\to4}^{LB}}$$
$$\overrightarrow{M_{A,1\to4}^{LB}} = (2.a.\vec{x}) \wedge (Y_{1\to4}^{LB}.\vec{y} + Z_{1\to4}^{LB}.\vec{z})$$
$$\overrightarrow{M_{A,1\to4}^{LB}} = 2.a.Y_{1\to4}^{LB}.\vec{z} - 2.a.Z_{1\to4}^{LB}.\vec{y}$$

Donc :

$$\{T_{0\to4}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & L_{E,0\to4} \\ 0 & -e.m_2.g - a.Z_{0\to4} \\ Z_{0\to4} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \{T_{1\to4}{}^{LB}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to4}^{LB} & -2.a.Z_{1\to4}^{LB} \\ Z_{1\to4}^{LB} & 2.a.Y_{1\to4}^{LB} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Puis, on applique le PFS : $\sum\{T_{\bar{S}\to S}\} = \{0\}$

$$\begin{cases} X_{1\to4}^{LA} = 0 \\ Y_{1\to4}^{LA} + Y_{1\to4}^{LB} = 0 \\ Z_{1\to4}^{LA} + Z_{0\to4} + Z_{1\to4}^{LB} = 0 \\ L_{E,0\to4} = 0 \\ -e.m_2.g - 2.a.Z_{1\to4}^{LB} - a.Z_{0\to4} = 0 \\ 2.a.Y_{1\to4}^{LB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{1\to4}^{LA} = Y_{1\to4}^{LA} = Y_{1\to4}^{LB} = L_{E,0\to4} = 0 \\ Z_{1\to4}^{LA} + Z_{0\to4} + Z_{1\to4}^{LB} = 0 \\ -e.m_2.g - 2.a.Z_{1\to4}^{LB} - a.Z_{0\to4} = 0 \end{cases}$$

On remarque que l'on ne peut pas tout résoudre car il nous manque toujours l'inconnue $Z_{0\to4}$ de l'isolement précédent.

Mais maintenant que l'on connait $L_{E,0\to4} = 0$, nous pouvons reprendre notre 1[er] système d'équations déterminées à la question précédente :

$$\begin{cases} X_{0\to4} = Y_{0\to4} = 0 \\ Z_{0\to4} + Z_{0\to3} - m_1.g - m_2.g = 0 \\ L_{E,0\to4} + y_0.Z_{0\to3} - d.m_1.g - y_0.m_2.g = 0 \\ M_{E,0\to4} = -e.m_2.g \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} X_{0\to4} = Y_{0\to4} = L_{E,0\to4} = 0 \\ Z_{0\to4} = -\dfrac{d.m_1.g + y_0.m_2.g}{y_0} + m_1.g + m_2.g = \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{y_0} \\ Z_{0\to3} = \dfrac{d.m_1.g + y_0.m_2.g}{y_0} \\ M_{E,0\to4} = -e.m_2.g \end{cases}}$$

Connaisant $Z_{0\to4} = \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{y_0}$, nous pouvons reprendre cette fois-ci notre 2ème système d'équations :

$$\begin{cases} X^{LA}_{1\to4} = Y^{LA}_{1\to4} + Y^{LB}_{1\to4} = L_{E,0\to4} = 0 \\ Z^{LA}_{1\to4} + Z_{0\to4} + Z^{LB}_{1\to4} = 0 \\ -e.m_2.g - 2.a.Z^{LB}_{1\to4} - a.Z_{0\to4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X^{LA}_{1\to4} = Y^{LA}_{1\to4} + Y^{LB}_{1\to4} = L_{E,0\to4} = 0 \\ Z^{LA}_{1\to4} + \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{y_0} + Z^{LB}_{1\to4} = 0 \\ Z^{LB}_{1\to4} = -\dfrac{e.m_2.g}{2.a} - \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{2.y_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^{LA}_{1\to4} = Y^{LA}_{1\to4} + Y^{LB}_{1\to4} = L_{E,0\to4} = 0 \\ Z^{LA}_{1\to4} + \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{y_0} + Z^{LB}_{1\to4} = 0 \\ Z^{LB}_{1\to4} = -\dfrac{e.m_2.g}{2.a} - \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{2.y_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X^{LA}_{1\to4} = Y^{LA}_{1\to4} + Y^{LB}_{1\to4} = L_{E,0\to4} = 0 \\ Z^{LA}_{1\to4} = -\dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{y_0} + \dfrac{e.m_2.g}{2.a} + \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{2.y_0} \\ Z^{LB}_{1\to4} = -\dfrac{e.m_2.g}{2.a} - \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{2.y_0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X^{LA}_{1\to4} = Y^{LA}_{1\to4} + Y^{LB}_{1\to4} = L_{E,0\to4} = 0 \\ Z^{LA}_{1\to4} = \dfrac{e.m_2.g}{2.a} - \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{2.y_0} \\ Z^{LB}_{1\to4} = -\dfrac{e.m_2.g}{2.a} - \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{2.y_0} \end{cases}}$$

1) Isolons {1, 4}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {1, 4}.
   - Action mécanique de 0 sur 4 (pivot d'axe $(E,\vec{z})$)
   - Action mécanique de 2 sur 1 (glissière de direction $\vec{y}$)
   - Action mécanique de la pesanteur sur 1

3) Modélisables par :

$$\{\mathrm{T}_{0\to4}\} = {}_E\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e.m_2.g \\ \dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \{\mathrm{T}_{2\to1}\} = {}_{\forall P}\begin{Bmatrix} X_{2\to1} & L_{P,2\to1} \\ 0 & M_{P,2\to1} \\ Z_{2\to1} & N_{P,2\to1} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \{\mathrm{T}_{pes\to1}\} = {}_{\forall P\in(G_1,\vec{z})}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_1.g & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4) Résolution :

On détermine les moments au point M des 2 torseurs à transporter :

$$\overrightarrow{M_{M,0\to4}} = \overrightarrow{M_{E,0\to4}} + \overrightarrow{ME} \wedge \overrightarrow{R_{0\to4}}$$

$$\overrightarrow{M_{M,0\to4}} = (-e.m_2.g.\vec{y}) + (-l.\vec{y} - h.\vec{z}) \wedge (\dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{y_0}.\vec{z})$$

$$\overrightarrow{M_{M,0\to4}} = -e.m_2.g.\vec{y} - l.\dfrac{(y_0 - d).m_1.g}{y_0}.\vec{x}$$

$$\overrightarrow{M_{M,pes\to1}} = \overrightarrow{M_{G_1,pes\to1}} + \overrightarrow{MG_1} \wedge \overrightarrow{R_{pes\to1}}$$

$$\overrightarrow{M_{M,pes\to1}} = -(l - d).\vec{y} \wedge (-m_1.g.\vec{z})$$

$$\overrightarrow{M_{M,pes\to1}} = (l - d).m_1.g.\vec{x}$$

Donc :

$$\left\{\mathrm{T}_{0\to 4}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & -l.\dfrac{(y_0-d).m_1.g}{y_0} \\ 0 & -e.m_2.g \\ \dfrac{(y_0-d).m_1.g}{y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{M\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathrm{T}_{pes\to 1}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & (l-d).m_1.g \\ 0 & 0 \\ -m_1.g & 0 \end{Bmatrix}_{M\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Puis, on applique le PFS : $\sum\left\{\mathrm{T}_{\bar{S}\to S}\right\} = \{0\}$

$$\begin{cases} X_{2\to 1} = 0 \\ 0 = 0 \\ Z_{2\to 1} + \dfrac{(y_0-d).m_1.g}{y_0} - m_1.g = 0 \\ L_{M,2\to 1} - l.\dfrac{(y_0-d).m_1.g}{y_0} + (l-d).m_1.g = 0 \\ M_{M,2\to 1} - e.m_2.g = 0 \\ N_{M,2\to 1} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow \begin{cases} X_{2\to 1} = 0 \\ Z_{2\to 1} = \dfrac{d.m_1.g}{y_0} \\ L_{M,2\to 1} = -l.\dfrac{d.m_1.g}{y_0} + d.m_1.g = \dfrac{d.(y_0-l).m_1.g}{y_0} \\ M_{M,2\to 1} = e.m_2.g \\ N_{M,2\to 1} = 0 \end{cases}}$$

1) Isolons {3}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {3}.
   - Action mécanique de 2 sur 3 (pivot d'axe $(C,\vec{z})$)
   - Action mécanique de 0 sur 3 (sphère-plan de point de contact D et de normale $\vec{z}$)

3) Modélisables par :

$$\left\{\mathrm{T}_{2\to 3}\right\} = \begin{Bmatrix} X_{2\to 3} & L_{P,2\to 3} \\ Y_{2\to 3} & M_{P,2\to 3} \\ Z_{2\to 3} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(C,\vec{z})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathrm{T}_{0\to 3}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{d.m_1.g + y_0.m_2.g}{y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(D,\vec{z})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4) Résolution :

Les 2 torseurs sont déjà écrits au point C.

Donc, on applique le PFS : $\sum\left\{\mathrm{T}_{\bar{S}\to S}\right\} = \{0\}$

$$\begin{cases} X_{2\to 3} = 0 \\ Y_{2\to 3} = 0 \\ Z_{2\to 3} + \dfrac{d.m_1.g + y_0.m_2.g}{y_0} = 0 \\ L_{C,2\to 3} = 0 \\ M_{C,2\to 3} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow \begin{cases} X_{2\to 3} = 0 \\ Y_{2\to 3} = 0 \\ Z_{2\to 3} = -\dfrac{d.m_1.g + y_0.m_2.g}{y_0} \\ L_{C,2\to 3} = 0 \\ M_{C,2\to 3} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}}$$

Ainsi, en récapitulant tous les résultats, les actions mécaniques au niveau des liaisons sont modélisables par :

$$\left\{\mathrm{T}_{1\to4}{}^{LA}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{e.m_2.g}{2.a} - \dfrac{(y_0-d).m_1.g}{2.y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{0\to4}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e.m_2.g \\ \dfrac{(y_0-d).m_1.g}{y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{E\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{2\to3}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\dfrac{d.m_1.g + y_0.m_2.g}{y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{\mathrm{T}_{1\to4}{}^{LB}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\dfrac{e.m_2.g}{2.a} - \dfrac{(y_0-d).m_1.g}{2.y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{2\to1}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & \dfrac{d.(y_0-l).m_1.g}{y_0} \\ 0 & e.m_2.g \\ \dfrac{d.m_1.g}{y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{M\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{0\to3}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{d.m_1.g + y_0.m_2.g}{y_0} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(D,\vec{z})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

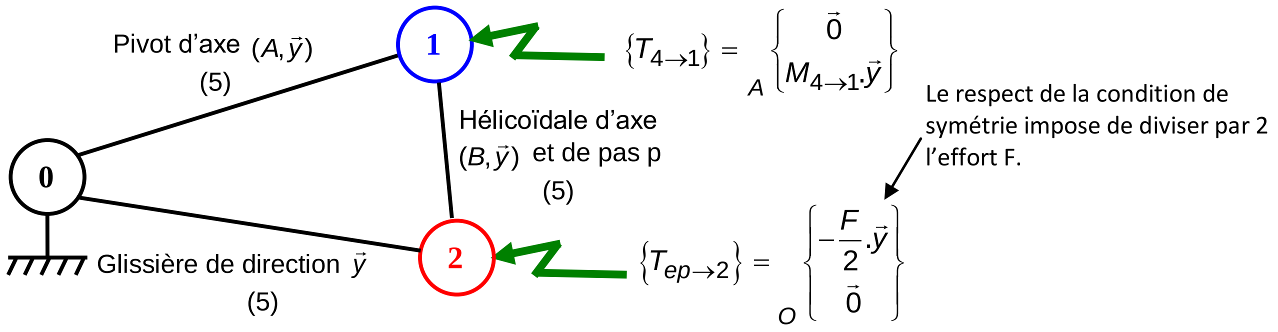
**Question 6 :** *Faire l'application numérique.*

$$\left\{\mathrm{T}_{1\to4}{}^{LA}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 18750 & 0 \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{0\to4}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -150000 \\ 62500 & 0 \end{Bmatrix}_{E\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{2\to3}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -187500 & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{\mathrm{T}_{1\to4}{}^{LB}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -81250 & 0 \end{Bmatrix}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{2\to1}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 337500 \\ 0 & 150000 \\ 37500 & 0 \end{Bmatrix}_{M\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{0\to3}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 187500 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(D,\vec{z})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

# Corrigé Exercice 2 : MACHINE DE TRACTION

**Question 1 :** *Établir le graphe de structure de la partie du système étudiée : solides 0, 1 et 2.*




**Question 2 :** *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à 2 au point B, les six équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système.*

1) Isolons {2}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {2}.
   - Action mécanique de 0 sur 2 (glissière de direction $\vec{y}$ )
   - Action mécanique de l'éprouvette sur 2
   - Action mécanique de 1 sur 2 (hélicoïdale d'axe $(B,\vec{y})$ et de pas $p$)

3) Modélisables par :

$$\{\mathcal{T}_{0\to2}\} = {}_{\forall P}\begin{Bmatrix} X_{0\to2} & L_{P,0\to2} \\ 0 & M_{P,0\to2} \\ Z_{0\to2} & N_{P,0\to2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \{\mathcal{T}_{ep\to2}\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \{\mathcal{T}_{1\to2}\} = {}_{\forall P\in(B,\vec{y})}\begin{Bmatrix} X_{1\to2} & L_{P,1\to2} \\ Y_{1\to2} & -Y_{1\to2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi} \\ Z_{1\to2} & N_{P,1\to2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

(signe « - » car pas à droite)

4) Résolution :

On détermine le moment au point B du torseur à transporter :

$$\overrightarrow{M_{B,ep\to2}} = \underbrace{\overrightarrow{M_{O,ep\to2}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BO}\wedge\overrightarrow{R_{ep\to2}} = D\cdot\vec{x}\wedge(-\frac{F}{2}\cdot\vec{y}) = -d\cdot\frac{F}{2}\cdot\vec{z}$$

Donc : $\{T_{ep\to2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & -d\cdot\frac{F}{2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Puis, on applique le PFS : $\sum\{\mathcal{T}_{\bar{2}\to2}\} = \{0\}$

$${}_B\begin{Bmatrix} X_{0\to2} & L_{B,0\to2} \\ 0 & M_{B,0\to2} \\ Z_{0\to2} & N_{B,0\to2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & -d\cdot\frac{F}{2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + {}_B\begin{Bmatrix} X_{1\to2} & L_{B,1\to2} \\ Y_{1\to2} & -Y_{1\to2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi} \\ Z_{1\to2} & N_{B,1\to2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ce qui permet d'obtenir les six équations scalaires :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1)\ X_{0\to2}+X_{1\to2}=0 & (4)\ L_{B,0\to2}+L_{B,1\to2}=0 \\ (2)\ -\dfrac{F}{2}+Y_{1\to2}=0 & (5)\ M_{B,0\to2}-Y_{1\to2}\cdot\dfrac{p}{2\cdot\pi}=0 \\ (3)\ Z_{0\to2}+Z_{1\to2}=0 & (6)\ N_{B,0\to2}-d\cdot\dfrac{F}{2}+N_{B,1\to2}=0 \end{array}}$$

**Question 3 :** *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à 1 au point B, les six équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système.*

1) Isolons {1}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {1}.
- Action mécanique de 0 sur 1 (pivot d'axe $(A,\vec{y})$)
- Action mécanique de 4 sur 1
- Action mécanique de 2 sur 1 (hélicoïdale d'axe $(B,\vec{y})$ et de pas $p$)

3) Modélisables par :

$$\{T_{0\to1}\}=\underset{\forall P\in(A,\vec{y})}{\begin{Bmatrix} X_{0\to1} & L_{P,0\to1} \\ Y_{0\to1} & 0 \\ Z_{0\to1} & N_{P,0\to1} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \{T_{4\to1}\}=\underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{C}{2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

un torseur couple est invariant

$$\{T_{2\to1}\}=-\{T_{1\to2}\}=\underset{\forall P\in(B,\vec{y})}{\begin{Bmatrix} -X_{1\to2} & -L_{P,1\to2} \\ -Y_{1\to2} & Y_{1\to2}\cdot\dfrac{p}{2\cdot\pi} \\ -Z_{1\to2} & -N_{P,1\to2} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Théorème des actions réciproques

4) Résolution :

Les 3 torseurs sont déjà écrits au point B.

Donc, on applique le PFS : $\sum\{T_{\bar{1}\to1}\}=\{0\}$

Donc :
$$\underset{B}{\begin{Bmatrix} X_{0\to1} & L_{B,0\to1} \\ Y_{0\to1} & 0 \\ Z_{0\to1} & N_{B,0\to1} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}+\underset{B}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{C}{2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}+\underset{B}{\begin{Bmatrix} -X_{1\to2} & -L_{B,1\to2} \\ -Y_{1\to2} & Y_{1\to2}\cdot\dfrac{p}{2\cdot\pi} \\ -Z_{1\to2} & -N_{B,1\to2} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\underset{B}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ce qui permet d'obtenir les six équations scalaires :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (7)\ X_{0\to1}-X_{1\to2}=0 & (10)\ L_{B,0\to1}-L_{B,1\to2}=0 \\ (8)\ Y_{0\to1}-Y_{1\to2}=0 & (11)\ -\dfrac{C}{2}+Y_{1\to2}\cdot\dfrac{p}{2\cdot\pi}=0 \\ (9)\ Z_{0\to1}-Z_{1\to2}=0 & (12)\ N_{B,0\to1}-N_{B,1\to2}=0 \end{array}}$$

**Question 4 :** *En déduire une relation entre $F$, $C$ et les dimensions du système.*

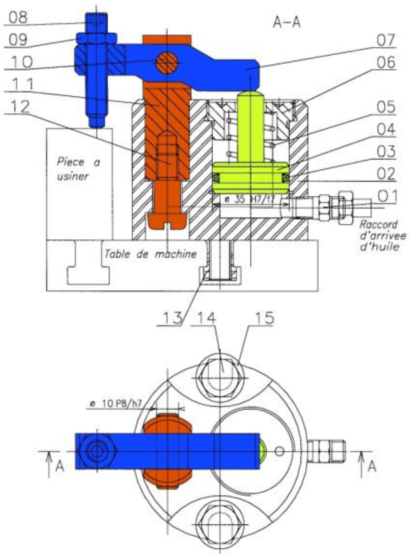
En utilisant les équations (2) et (11) : $-\dfrac{C}{2}+\dfrac{F}{2}\cdot\dfrac{p}{2\cdot\pi}=0$ soit $\boxed{-C+F\cdot\dfrac{p}{2\cdot\pi}=0}$

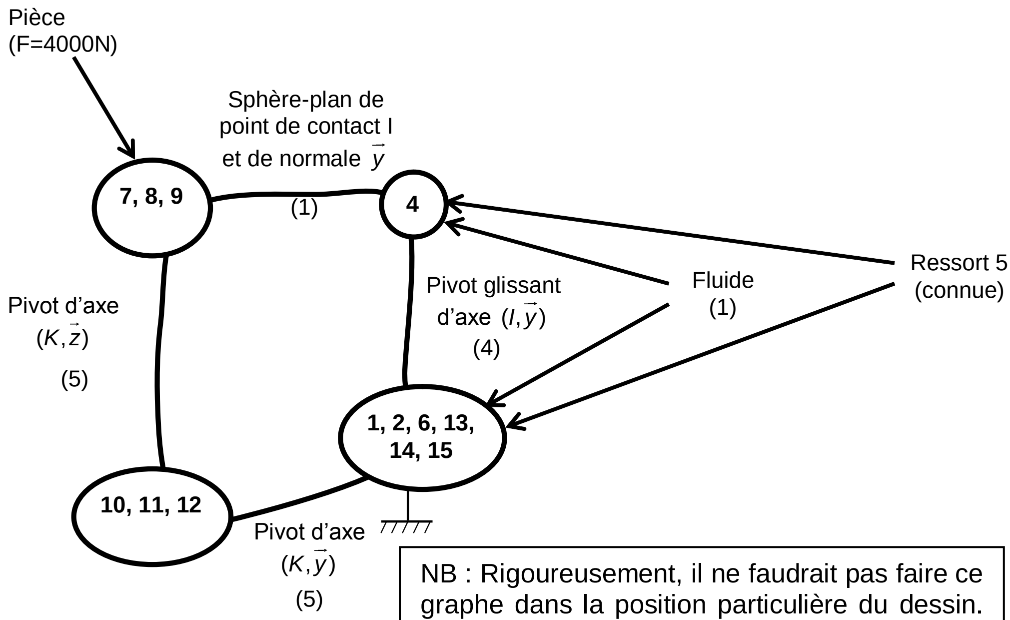
**Question 5 :** *Conclure quant au respect du critère de la fonction FS1.*

$\boxed{F=41888\,N>20\,000\,N}$ Le critère du CdCF est donc respecté.

# Corrigé Exercice 3 : BRIDE HYDRAULIQUE

**Question 1 :** *Repérer et colorier chaque classe d'équivalence cinématique (CEC) :*
**Question 2 :** *Réaliser le graphe de structure, puis compléter le en vue d'une étude de statique.*




NB : Rigoureusement, il ne faudrait pas faire ce graphe dans la position particulière du dessin. Ainsi les sphères-plans en I et J ne seraient plus suivant $\vec{y}$ …

**Question 3 :** *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à {7, 8, 9} au point K, les six équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système. En déduire l'expression de $Y_{4\to7}$ en fonction de l'effort presseur $F$ et des dimensions du système.*

1) Isolons {7, 8, 9}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {7, 8, 9}.
   - Action mécanique de la pièce sur 8 (sphère-plan de point de contact J et de normale $\vec{y}$)
   - Action mécanique de 10 sur 7 (pivot d'axe $(K,\vec{z})$)
   - Action mécanique de 4 sur 7 (sphère-plan de point de contact I et de normale $\vec{y}$)

3) Modélisables par :

$$\left\{\mathcal{T}_{pièce\to8}\right\} = \underset{\forall P\in(J,\vec{y})}{\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathcal{T}_{10\to7}\right\} = \underset{\forall P\in(K,\vec{z})}{\left\{\begin{matrix} X_{10\to7} & L_{P,10\to7} \\ Y_{10\to7} & M_{P,10\to7} \\ Z_{10\to7} & 0 \end{matrix}\right\}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathcal{T}_{4\to7}\right\} = \underset{\forall P\in(I,\vec{y})}{\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{4\to7} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4) Résolution :

On détermine les moments au point K des 2 torseurs à transporter :

$$\overrightarrow{M_{K,pièce\to8}} = \overrightarrow{M_{J,pièce\to8}} + \overrightarrow{KJ} \wedge \overrightarrow{R_{pièce\to8}}$$
$$\overrightarrow{M_{K,pièce\to8}} = (a.\vec{x} + ?.\vec{y}) \wedge F.\vec{y}$$
$$\overrightarrow{M_{K,pièce\to8}} = a.F.\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_{K,4\to7}} = \overrightarrow{M_{I,4\to7}} + \overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{R_{4\to7}}$$
$$\overrightarrow{M_{K,4\to7}} = (b.\vec{x} + ?.\vec{y}) \wedge Y_{4\to7}.\vec{y}$$
$$\overrightarrow{M_{K,4\to7}} = b.Y_{4\to7}.\vec{z}$$

Donc :
$$\left\{\mathcal{T}_{pièce\to8}\right\} = \underset{K}{\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & a.F \end{matrix}\right\}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathcal{T}_{10\to7}\right\} = \underset{K}{\left\{\begin{matrix} X_{10\to7} & L_{K,10\to7} \\ Y_{10\to7} & M_{K,10\to7} \\ Z_{10\to7} & 0 \end{matrix}\right\}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathcal{T}_{4\to7}\right\} = \underset{K}{\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{4\to7} & 0 \\ 0 & b.Y_{4\to7} \end{matrix}\right\}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Puis, on applique le PFS : $\sum\left\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\right\}=\{0\}$

$$\begin{cases} X_{10\to7}=0 \\ F+Y_{10\to7}+Y_{4\to7}=0 \\ Z_{10\to7}=0 \\ L_{K,10\to7}=0 \\ M_{K,10\to7}=0 \\ a.F+b.Y_{4\to7}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{10\to7}=Z_{10\to7}=L_{K,10\to7}=M_{K,10\to7}=0 \\ Y_{4\to7}=\dfrac{-a.F}{b} \\ Y_{10\to7}=-F+\dfrac{a.F}{b}=\dfrac{(a-b)}{b}.F \end{cases}$$

**Question 4 :** *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à {4} au point I, les six équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système. En déduire l'expression de p en fonction de l'effort presseur F , de la raideur k et des dimensions du système.*

1) Isolons {4}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {4}.
   - Action mécanique du fluide sur 4
   - Action mécanique du ressort sur 4
   - Action mécanique de 2 sur 4 (pivot glissant d'axe $(I,\vec{y})$)
   - Action mécanique de 7 sur 4 (sphère-plan de point de contact I et de normale $\vec{y}$ )

3) Modélisables par :

$$\left\{\mathcal{T}_{fluide\to4}\right\}=\underset{\forall P\in(I,\vec{y})}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ p.S & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathcal{T}_{ressort\to4}\right\}=\underset{\forall P\in(I,\vec{y})}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -k.(L_0-L) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{2\to4}\right\}=\underset{\forall P\in(I,\vec{y})}{\begin{Bmatrix} X_{2\to4} & L_{I,2\to4} \\ 0 & 0 \\ Z_{2\to4} & N_{I,2\to4} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathcal{T}_{7\to4}\right\}=\underset{\forall P\in(I,\vec{y})}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{a.F}{b} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4) Résolution :

On peut appliquer directement le PFS : $\sum\left\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\right\}=\{0\}$ car les torseurs sont déjà tous écrits au même point I.

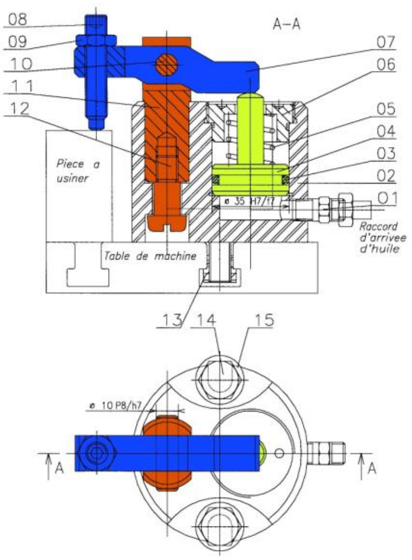
$$\begin{cases} X_{2\to4}=0 \\ p.S-k.(L_0-L)+\dfrac{a.F}{b}=0 \\ Z_{2\to4}=0 \\ L_{I,2\to4}=0 \\ 0=0 \\ N_{I,2\to4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{2\to4}=Z_{2\to4}=L_{I,2\to4}=N_{I,2\to4}=0 \\ \boxed{p=\dfrac{k.(L_0-L)-\dfrac{a.F}{b}}{S}} \end{cases}$$

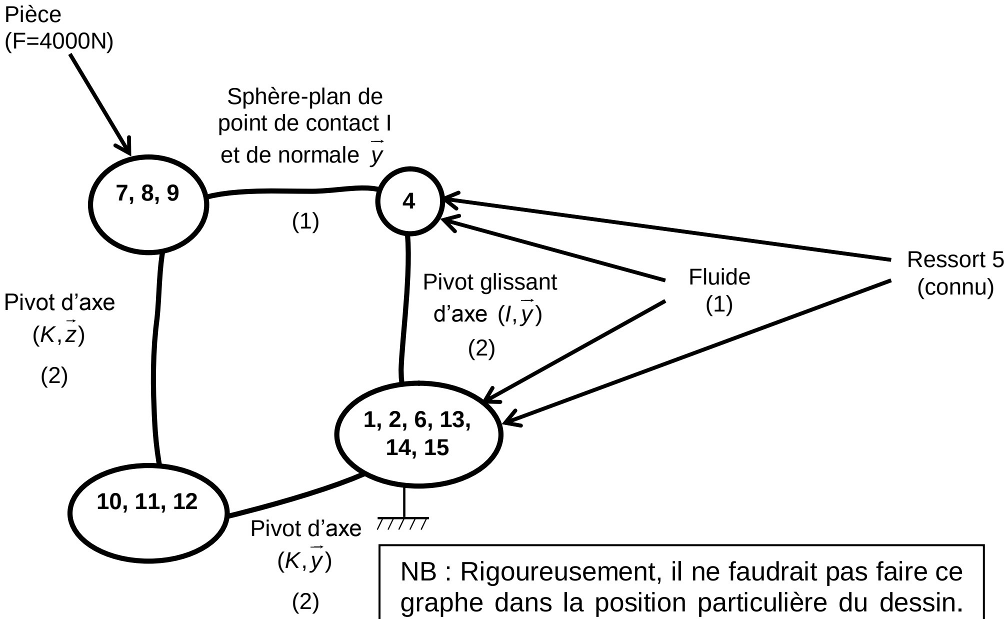
**Question 5 :** *En déduire la valeur minimale de la pression p permettant le respect du critère de la fonction FP1.*

$$\boxed{\Rightarrow p=\dfrac{10.(20-16)-\dfrac{-32.4000}{33}}{\pi.30^2}=1{,}4\ N/mm^2=1{,}4\ MPa=14\ bar}$$

# Corrigé Exercice 4 : BRIDE HYDRAULIQUE AVEC HYPOTHÈSE PROBLÈME PLAN

**Question 2 :** *Réaliser le graphe de structure, puis compléter le en vue d'une étude de statique.*




NB : Rigoureusement, il ne faudrait pas faire ce graphe dans la position particulière du dessin. Ainsi les ponctuelles en I et J ne seraient plus suivant $\vec{y}$ .

**Question 3 :** *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à {7, 8, 9} au point K, les six équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système. En déduire l'expression de $Y_{4\to7}$ en fonction de l'effort presseur F et des dimensions du système.*

1) Isolons {7, 8, 9}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {7, 8, 9}.
   - Action mécanique de la pièce sur 8 (sphère-plan de point de contact J et de normale $\vec{y}$ )
   - Action mécanique de 10 sur 7 (pivot d'axe $(K,\vec{z})$ )
   - Action mécanique de 4 sur 7 (sphère-plan de point de contact I et de normale $\vec{y}$ )

3) Modélisables avec l'hypothèse problème plan $(J,\vec{x},\vec{y})$ par :

$$\left\{\mathrm{T}_{pièce\to8}\right\} = \underset{\forall P\in(J,\vec{y})}{\begin{Bmatrix} 0 & - \\ F & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{10\to7}\right\} = \underset{K}{\begin{Bmatrix} X_{10\to7} & - \\ Y_{10\to7} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{\mathrm{T}_{4\to7}\right\} = \underset{\forall P\in(I,\vec{y})}{\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{4\to7} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

NB : Avec l'hypothèse problème plan $(J,\vec{x},\vec{y})$, la forme des différents torseurs n'est valable uniquement pour des points du plan de symétrie. C'est pourquoi le torseur de la pivot n'est valable qu'au point K et non pas $\forall P \in (K,\vec{z})$.

4) Résolution :

On détermine les moments au point K des 2 torseurs à transporter :

$$\overrightarrow{M_{K,pièce\to8}} = \overrightarrow{M_{J,pièce\to8}} + \overrightarrow{KJ} \wedge \overrightarrow{R_{pièce\to8}} \qquad \overrightarrow{M_{K,4\to7}} = \overrightarrow{M_{I,4\to7}} + \overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{R_{4\to7}}$$

$$\overrightarrow{M_{K,pièce\to8}} = (a.\vec{x} + ?.\vec{y}) \wedge F.\vec{y} \qquad \overrightarrow{M_{K,4\to7}} = (b.\vec{x} + ?.\vec{y}) \wedge Y_{4\to7}.\vec{y}$$

$$\overrightarrow{M_{K,pièce\to8}} = a.F.\vec{z} \qquad \overrightarrow{M_{K,4\to7}} = b.Y_{4\to7}.\vec{z}$$

Donc : $\left\{\mathcal{T}_{pièce\to 8}\right\} = {}_K\begin{Bmatrix} 0 & - \\ F & - \\ - & a.F \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ $\left\{\mathcal{T}_{10\to 7}\right\} = {}_K\begin{Bmatrix} X_{10\to 7} & - \\ Y_{10\to 7} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ $\left\{\mathcal{T}_{4\to 7}\right\} = {}_K\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{4\to 7} & - \\ - & b.Y_{4\to 7} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Puis, on applique le PFS : $\sum\left\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\right\} = \{0\}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} X_{10\to 7} = 0 \\ F + Y_{10\to 7} + Y_{4\to 7} = 0 \\ a.F + b.Y_{4\to 7} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{10\to 7} = 0 \\ Y_{4\to 7} = \dfrac{-a.F}{b} \\ Y_{10\to 7} = -F + \dfrac{a.F}{b} = \dfrac{(a-b)}{b}.F \end{cases}$

**Question 4 :** *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à {4} au point I, les six équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système. En déduire l'expression de p en fonction de l'effort presseur F , de la raideur k et des dimensions du système.*

1) Isolons {4}.

2) Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) sur {4}.
   - Action mécanique du fluide sur 4
   - Action mécanique du ressort sur 4
   - Action mécanique de 2 sur 4 (pivot glissant d'axe $(I,\vec{y})$)
   - Action mécanique de 7 sur 4 (sphère-plan de point de contact I et de normale $\vec{y}$ )

3) Modélisables avec l'hypothèse problème plan $(J,\vec{x},\vec{y})$ par :

$$\left\{\mathcal{T}_{fluide\to 4}\right\} = {}_{\forall P\in(I,\vec{y})}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ p.S & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathcal{T}_{ressort\to 4}\right\} = {}_{\forall P\in(I,\vec{y})}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ -k.(L_0 - L) & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{2\to 4}\right\} = {}_{\forall P\in(I,\vec{y})}\begin{Bmatrix} X_{2\to 4} & - \\ 0 & - \\ - & N_{I,2\to 4} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \left\{\mathcal{T}_{7\to 4}\right\} = {}_{\forall P\in(I,\vec{y})}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ \dfrac{a.F}{b} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4) Résolution :

On peut appliquer directement le PFS : $\sum\left\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\right\} = \{0\}$ car les torseurs sont déjà tous écrits au même point I.

$$\begin{cases} X_{2\to 4} = 0 \\ p.S - k.(L_0 - L) + \dfrac{a.F}{b} = 0 \\ N_{I,2\to 4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{2\to 4} = N_{I,2\to 4} = 0 \\ p = \dfrac{k.(L_0 - L) - \dfrac{a.F}{b}}{S} \end{cases}$$

**Question 5 :** *Faire l'application numérique.*

$$\boxed{\Rightarrow p = \dfrac{10.(20-16) - \dfrac{-32.4000}{33}}{\pi.30^2} = 1{,}4\ N/mm^2 = 1{,}4\ MPa = 14\ bar}$$