

Évaluation des performances des systèmes asservis modélisés en SLCI : Stabilité

Sommaire

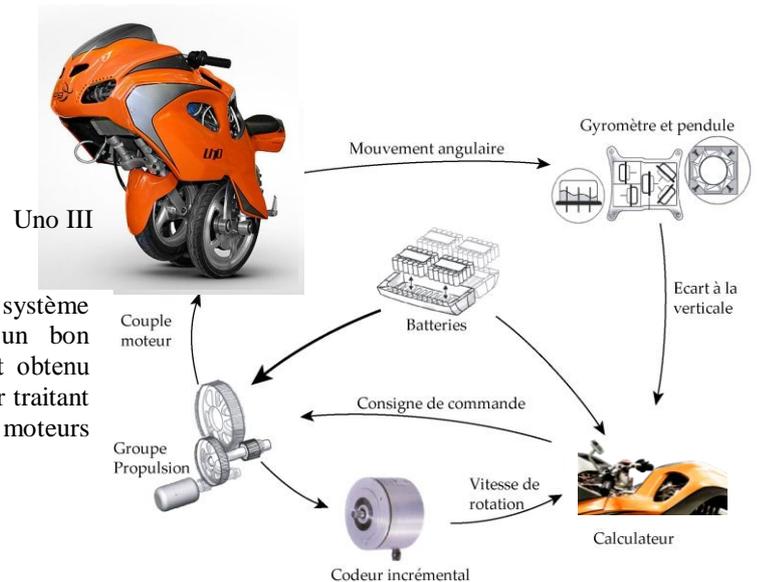
Évaluation des performances des systèmes asservis modélisés en SLCI : Stabilité

		1
1	Définitions	3
1.1	Stabilité – Définition générale	3
1.2	Réponse libre – Réponse à l’impulsion de Dirac	3
1.3	Condition fondamentale de stabilité d’un SLCI.....	3
1.4	Réduction de l’ordre d’un système – pôle dominant.....	4
1.5	Possibilité d’instabilité après bouclage d’un système pourtant stable.....	5
2	Étude de la stabilité à partir de l’analyse de la FTBF.....	6
2.1	Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF.....	6
2.2	Etude de la stabilité à partir du critère algébrique de Routh appliqué à la FTBF.....	7
2.3	Etude de la stabilité des systèmes multi-variables	9
3	Étude de la stabilité à partir de critères graphiques sur la FTBO	11
3.1	Equation caractéristique et point critique – Définitions	11
3.2	Critère du revers dans le plan de Nyquist	11
3.3	Critère du revers dans le plan de Black	12
3.4	Critère du revers dans le plan de Bode	12
3.5	Limites du critère du revers	13
3.6	Marges de stabilité.....	14
3.7	Facteur de résonance – Abaque de Black-Nichols.....	15

Exemple de système asservi : BPG Uno Scooter Concept



Uno I (Concept initial)



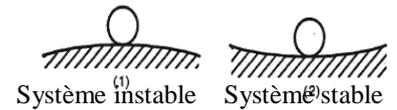
Le scooter BPG Uno III est un parfait exemple de système asservi qui doit être nécessairement stable pour un bon fonctionnement. L'équilibre du système est notamment obtenu grâce à un système gyroscopique couplé à un calculateur traitant les informations et transmettant les consignes aux deux moteurs électriques équipant les deux groupes propulsion. (<http://bpg-motors.com/>).

On quantifie les performances de stabilité, précision et rapidité d'un système asservi, selon l'évaluation de 3 critères que sont respectivement les dépassements, l'erreur et le temps de réponse à 5%. La stabilité est une notion générale non spécifique des systèmes asservis mais elle prend cependant une grande importance dans le cas de ces systèmes, car on souhaite toujours qu'un système asservi soit stable. La stabilité est donc la performance que l'on regarde en premier et il est inutile d'analyser les autres performances si le système n'est pas stable.

1 Définitions

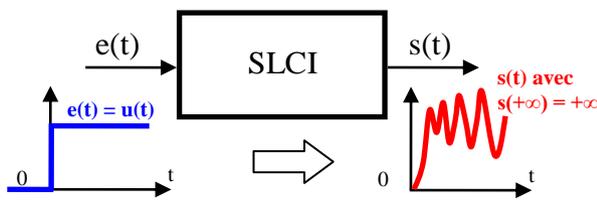
1.1 Stabilité – Définition générale

On dit qu'un système est stable si, écarté de sa position par une cause extérieure, il revient vers cette position lorsque la cause disparaît.

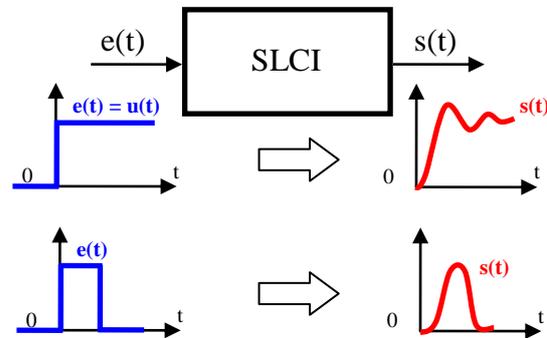


Un système réel instable oscille jusqu'à sa destruction. Ces oscillations sont dans le cas général limitées par les différentes saturations (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques, ...). Ces limitations physiques peuvent laisser croire que la sortie du système est stable...

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



Réponse s(t) d'un système instable



Réponses s(t) d'un système stable

1.2 Réponse libre – Réponse à l'impulsion de Dirac

Remarque 1 : étudier la réponse libre d'un système, revient à étudier le système lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. Un système stable a tendance à revenir dans sa position d'équilibre. Dans le cas contraire le système est dit instable.

Remarque 2 : pour étudier la réponse libre, il suffit de solliciter le système par une impulsion de Dirac et de vérifier que sa réponse libre tend vers zéro à l'infini.

1.3 Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI

La stabilité d'un SLCI peut être déterminée uniquement à partir des pôles (racine du dénominateur) de sa fonction de transfert H(p). Supposons que cette fonction ait :

- 1 pôle réel simple $p = a$
- 1 pôle réel double $p = b$
- 2 pôles complexes conjugués simples $p = c \pm j \cdot d$

$$S(p) \text{ peut donc s'écrire : } S(p) = H(p) \cdot E(p) = H(p) \cdot 1 = \frac{N(p)}{(p-a) \cdot (p-b)^2 \cdot (p-c)^2 + d^2}$$

$$S(p) \text{ peut ensuite se décomposer : } S(p) = \frac{A}{p-a} + \frac{B}{p-b} + \frac{C}{(p-b)^2} + \frac{D \cdot p + E}{(p-c)^2 + d^2}$$

$$S(p) \text{ se remonte en temporelle en } s(t) = \left(A \cdot e^{a \cdot t} + B \cdot e^{b \cdot t} + C \cdot t \cdot e^{b \cdot t} + D \cdot e^{c \cdot t} \cdot \cos(d \cdot t) + \frac{D \cdot c + E}{d} \cdot e^{c \cdot t} \cdot \sin(d \cdot t) \right) \cdot u(t)$$

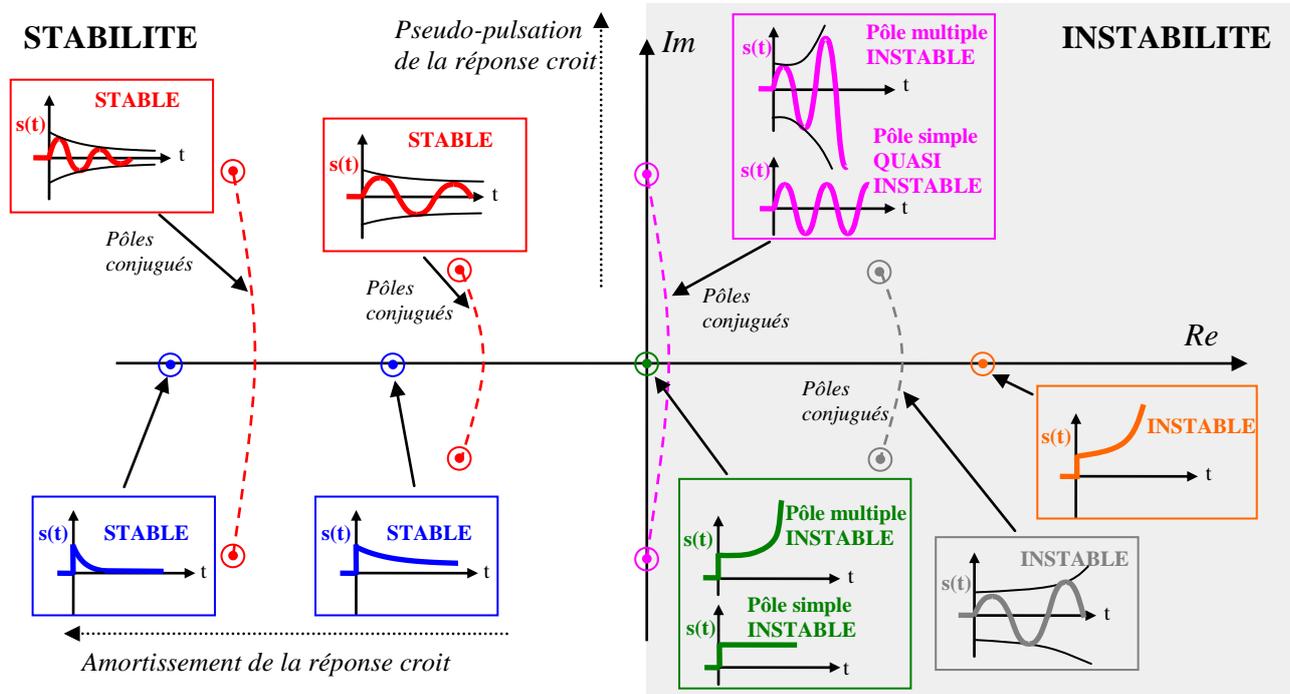
Pour que la sortie soit bornée et donc stable, les exponentielles doivent toutes être décroissantes. Ainsi :

Un Système Linéaire Continu Invariant est stable si les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

Nb : le rajout du mot « strictement » est expliqué dans la partie suivante.

1.4 Réduction de l'ordre d'un système – pôle dominant.

Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système



Bien que sa réponse à l'impulsion soit stable, un **intégrateur pur** est tout de même considéré comme un système **instable** puisqu'une entrée en échelon conduit à une sortie en rampe.

Remarque : pour les pôles à partie réelle négative, la réponse converge vers zéro et plus le pôle est éloigné de l'axe imaginaire, plus la décroissance est rapide.

Ainsi, pour un système stable, on peut remarquer que l'effet des pôles très éloignés de l'axe imaginaire disparaît bien avant celui des pôles qui en sont plus proches, compte tenu des décroissances exponentielles très différentes. Aussi, **les pôles du système les plus proches de l'axe imaginaire sont qualifiés de pôles dominants.**

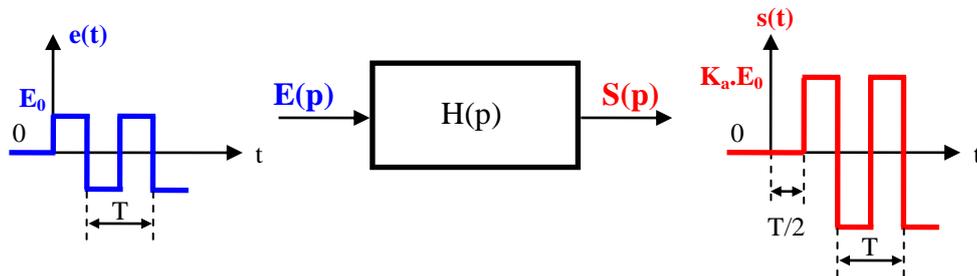
S'ils sont suffisamment éloignés des pôles dominants, les pôles les plus éloignés de l'axe imaginaire peuvent être négligés, ce qui permet de diminuer l'ordre de la fonction de transfert $F(p)$ modélisant le système. On peut ainsi évaluer les performances attendues d'un système en limitant la complexité des calculs.

Dans la pratique, le choix est simple si les pôles sont suffisamment écartés les uns des autres, et beaucoup plus délicat dans le cas contraire. Dans un cas favorable, on procède comme suit :

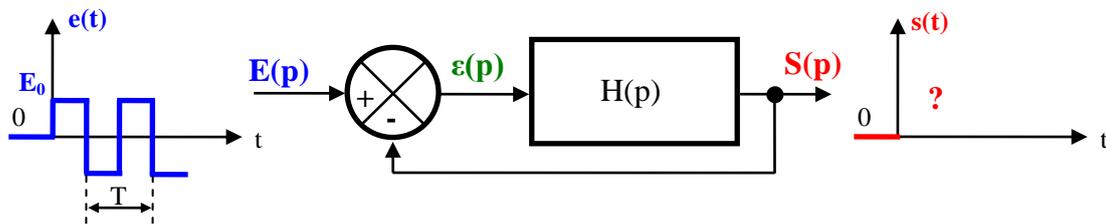
- on garde le pôle réel le plus proche de l'axe imaginaire et la paire de pôles complexes conjugués la plus proche de l'axe imaginaire ;
- on garde dans tous les cas les intégrateurs, donc le terme en p^α .

1.5 Possibilité d'instabilité après bouclage d'un système pourtant stable

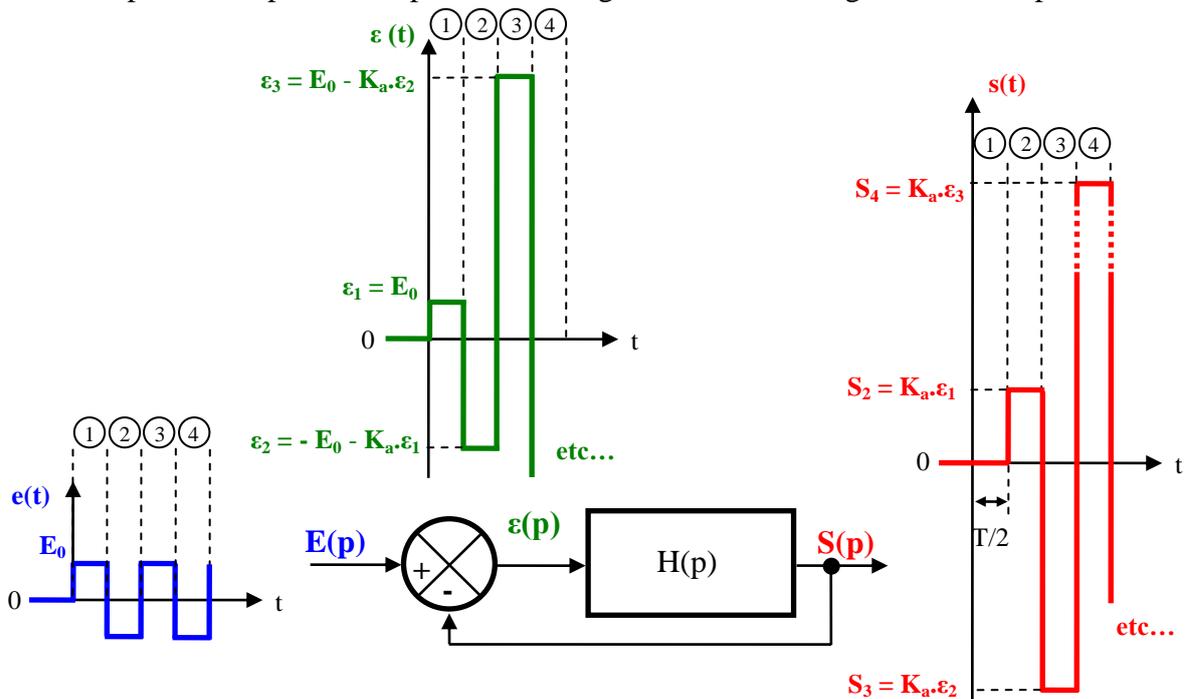
Lorsque l'on boucle un SLCI pour l'asservir, l'utilisation de cette boucle peut déstabiliser le système. Pour illustrer le phénomène on peut comparer la réponse d'un même système, de fonction de transfert $H(p)$, dans le cas où il est non bouclé puis dans le cas où il est bouclé. Pour cela on le sollicite avec un même signal d'entrée $e(t)$ rectangulaire de période T et d'amplitude E_0 . On considère que le système étudié (bloc $H(p)$) entraîne un déphasage de $T/2$ du signal et l'amplifie d'une valeur $K_a (>1)$:



En boucle ouverte on constate que le système est stable, le signal de sortie est juste amplifié et déphasé par rapport au signal d'entrée. Si on boucle ce même système avec un retour unitaire et qu'il est soumis à la même entrée en créneau, $H(p)$ est maintenant soumis à une entrée $\varepsilon(p) = S(p) - E(p)$ qui correspond à la différence entre les deux signaux d'entrée et de sortie.



Pour déterminer le signal de sortie $s(t)$, il faut cette fois ci déterminer l'écart $\varepsilon(t)$ qui entre dans le bloc, $1/2$ période par $1/2$ période. Le tracé obtenu montre le phénomène de « pompage » ou instabilité dans laquelle la grandeur amplifiée $s(t)$ s'ajoute au signal d'entrée qui est lui-même de nouveau amplifié. Le processus se reproduit de période en période et le signal de sortie diverge donc très rapidement...



Pour la phase 1 : l'écart $\varepsilon_1 = E_0$.

Pour la phase 2 : l'écart $\varepsilon_2 = E_2 - S_2 = -E_0 - K_a \cdot \varepsilon_1 = -E_0 \cdot (1 + K_a)$.

Pour la phase 3 : l'écart $\varepsilon_3 = E_3 - S_3 = E_0 - K_a \cdot \varepsilon_2 = E_0 - K_a \cdot (-E_0 \cdot (1 + K_a)) = E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2)$.

Pour la phase 4 : l'écart $\varepsilon_4 = E_4 - S_4 = -E_0 - K_a \cdot \varepsilon_3 = -E_0 - K_a \cdot (E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2)) = -E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2 + K_a^3)$, etc...

Soit un écart qui tend en valeur absolue vers $E_0.(1 + K_a + K_a^2 + K_a^3 + \dots + K_a^n)$. Le signal de sortie diverge. Il y a donc instabilité après bouclage si $K_a > 1$.

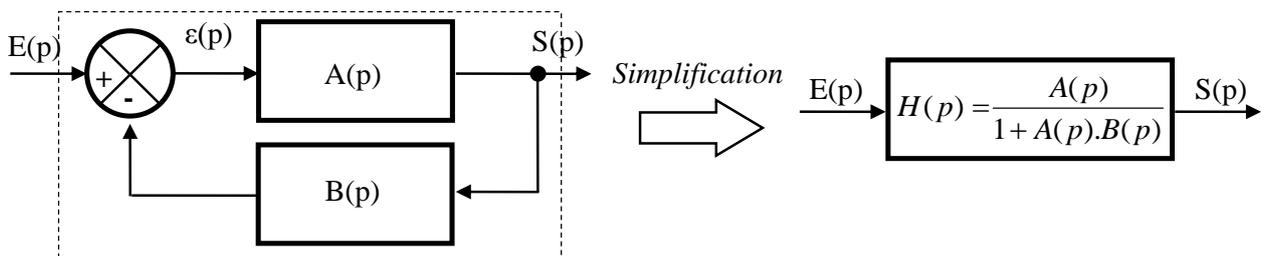
L'existence d'une boucle de retour impose donc d'étudier la stabilité des systèmes asservis :

- Soit à partir de **critères analytiques sur le polynôme caractéristique de la fonction de transfert boucle fermée (FTBF)** du système, ce qui nécessite d'avoir le modèle numérique de cette FTBF.
- Soit à partir de **critères graphiques sur les lieux de transfert de la fonction de transfert boucle ouverte (FTBO)** du système. Dans la pratique, les critères graphiques sont plutôt privilégiés par les ingénieurs car ils permettent de déterminer des marges de stabilité.

2 Étude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF

2.1 Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF

Le calcul de la fonction de transfert boucle fermée d'un système asservi permet de passer d'un modèle bouclé à un modèle équivalent non bouclé de fonction de transfert $H(p)$.

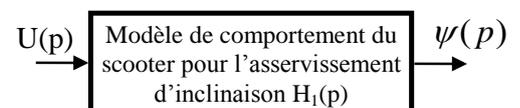


La FTBF pouvant aussi se mettre sous la forme privilégiant l'écriture en pôles, il est par conséquent possible de déterminer la stabilité d'un système asservi à l'aide de la condition fondamentale.

Un système asservi est stable si sa FTBF possède des pôles à partie réelle négative.

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

La chaîne d'action permettant de réguler l'inclinaison du scooter est réalisée par un ensemble amplificateur et motoréducteur. Cet ensemble délivre un couple moteur qui permet d'incliner le châssis par rapport à la verticale.



Le modèle de comportement de ce système (amplificateur + motoréducteur + modèle dynamique du châssis \approx pendule inverse) donne une fonction de transfert qui peut s'écrire sous la forme :

$$H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1}$$

Avec : $U(p)$ transformée de Laplace de la tension de commande du motoréducteur, $\psi(p)$ transformée de Laplace de l'angle d'inclinaison du scooter par rapport à la verticale, K_1 gain du système mécanique ($K_1 = 0,24 \text{ rad/V}$) et ω_1 pulsation propre du système mécanique ($\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$).

L'écriture en pôles donne :
$$H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{(p - \omega_1) \cdot (p + \omega_1)} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{(p - 4,1) \cdot (p + 4,1)}$$

$H_1(p)$ possède 2 pôles réels dont un est positif \rightarrow le modèle dynamique du scooter sans asservissement est donc instable, ce qui est logique puisque le centre de gravité du scooter est au dessus de l'axe de rotation des roues (pendule inverse !).

2.2 Etude de la stabilité à partir du critère algébrique de Routh appliqué à la FTBF

Lorsque le dénominateur $D(p)$ de la FTBF $H(p)$ n'est pas sous une forme factorisée permettant d'identifier les pôles, il est possible d'utiliser des critères algébriques. La FTBF s'écrit alors :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ où } D(p) = 1 + \text{FTBO}(p), \text{ appelé polynôme caractéristique de la FTBF, se présente sous}$$

la forme $D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n$.

Critère de Routh

L'application du critère algébrique de Routh se fait en 2 étapes :

- **Premier examen :** Pour qu'un système soit stable, **il est nécessaire que les coefficients a_i du polynôme caractéristique soient tous strictement positifs.**



Nécessaire ne signifie pas suffisant...

En revanche, pour les polynômes caractéristiques de degré 1 et 2, ce premier examen est suffisant pour déterminer si le système est stable ou non.

- **Deuxième examen :** Si tous les a_i sont strictement positifs, on ne peut pas affirmer que les pôles sont à partie réelle négative. Il faut construire le tableau de Routh pour savoir si le système est stable. Une fois le tableau construit, Routh a établi que la **condition nécessaire et suffisante de stabilité** est que **tous les coefficients de la première colonne du tableau soient tous strictement positifs.**

Exemple du premier examen :

On considère trois systèmes asservis ayant pour FTBF respectives les fonctions

$$H_1(p) = \frac{1}{2 + 5p + 3p^2 + p^4} \quad H_2(p) = \frac{1 + 3p}{4 + 3p - 3p^2 + 6p^3 + 8p^4}$$

$$H_3(p) = \frac{1 + 2p^2}{8 + 10p + 4p^2 + 2p^3}$$

Peut-on conclure quant à la stabilité de ces trois systèmes ?

- Le système de fonction de transfert $H_1(p)$ ne satisfait pas à la condition nécessaire de stabilité car il n'y a pas de terme en p^3 au dénominateur de sa fonction de transfert. Ce système est donc instable.
- Le système de fonction de transfert $H_2(p)$ ne satisfait pas à la condition nécessaire de stabilité car le coefficient du terme en p^2 est négatif. Ce système est donc instable.
- Le système de fonction de transfert $H_3(p)$ satisfait bien à la condition nécessaire de stabilité car les quatre coefficients du polynôme du dénominateur de sa fonction de transfert sont tous strictement positifs. On ne peut donc pas conclure, car on ne sait pas encore si ce système est stable ou instable.

Deuxième examen : construction du tableau de Routh

Les deux premières lignes du tableau sont écrites directement à l'aide des coefficients de $D(p)$. Les autres lignes sont formées de termes qui sont calculés.

Les deux premières lignes du tableau sont écrites à l'aide des coefficients de $D(p)$. p^n correspondant au plus haut degré du polynôme.

Ce terme est calculé « suivant le γ » en trait plein rouge

Les autres lignes sont formées de termes qui sont calculés

a_{n-1} est le pivot de calcul des termes de la ligne de p^{n-2}

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
p^{n-2}	$L_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$L_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$L_3 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-6} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$...
p^{n-3}	$\frac{a_{n-3} \cdot L_1 - a_{n-1} \cdot L_2}{L_1}$	$\frac{a_{n-5} \cdot L_1 - a_{n-1} \cdot L_3}{L_1}$
...
p^2	C_1	C_2	C_3	...
p^1	B_1	B_2	B_3	...
p^0	$\frac{C_2 \cdot B_1 - C_1 \cdot B_2}{B_1}$	$\frac{C_3 \cdot B_1 - C_1 \cdot B_3}{B_1}$

Si tous les coefficients de la première colonne du tableau sont strictement positifs, le système est alors stable.

Exemple de polynôme caractéristique :

$p^3 + 2 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 4$

p^3	1	3	0	
p^2	2	4	0	$\frac{2 \times 3 - 4 \times 1}{2}$
p^1	1	0		$\frac{4 \times 1 - 2 \times 0}{1}$
p^0	4	0		

Système stable

Deuxième examen pour un polynôme caractéristique du 3^{ème} ordre

Comme l'étude de la stabilité à l'aide du critère de Routh est limitée au concours aux polynômes caractéristiques du 3^{ème} ordre, le tableau de Routh est limité à celui ci-dessous.



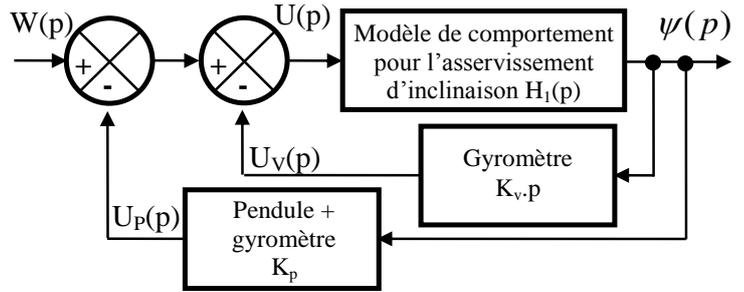
p^3	a_3	a_1
p^2	a_2	a_0
p^1	$\frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_2}$	0
p^0	a_0	0

Ainsi, le deuxième examen revient donc simplement à vérifier que :
 $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

Exemple du polynôme caractéristique ci-dessus : $p^3 + 2p^2 + 3p + 4$ donc système stable.
 $2 \times 3 > 1 \times 4$

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balançé :

Afin de stabiliser l'inclinaison du scooter, la grandeur de commande, $u(t)$ est en fait élaborée à partir des mesures de $\dot{\psi}(t)$ (réalisée par le gyromètre) et de $\psi(t)$ (réalisée par combinaison de la mesure du gyromètre et du pendule).



Pour étudier le comportement du système il faut d'abord déterminer la FTBF du système :

$$H_2(p) = \frac{\psi(p)}{W(p)} = \frac{\frac{H_1(p)}{1 + p.K_v.H_1(p)}}{1 + \frac{K_p.H_1(p)}{1 + p.K_v.H_1(p)}} = \frac{H_1(p)}{1 + p.K_v.H_1(p) + K_p.H_1(p)} = \frac{\frac{K_1.\omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2}}{1 + p.K_v.\frac{K_1.\omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2} + K_p.\frac{K_1.\omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2}} = \frac{K_1.\omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2 + p.K_v.K_1.\omega_1^2 + K_p.K_1.\omega_1^2}$$

Premier examen du critère de Routh :

Tous les coefficients du polynôme caractéristique de la FTBF doivent être positifs et non nuls.

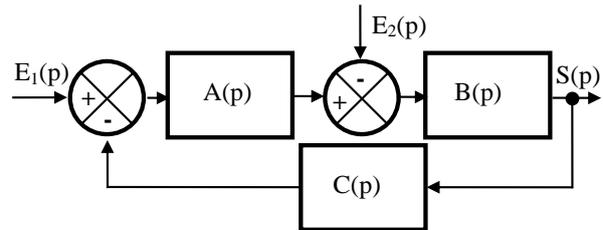
$$D(p) = p^2 + p.K_v.K_1.\omega_1^2 + K_p.K_1.\omega_1^2 - \omega_1^2 \text{ donc } K_v.K_1 > 0 \text{ et } K_p.K_1 - 1 > 0.$$

Ici le 1^{er} examen suffit puisque le polynôme caractéristique est du 2nd degré donc au final pour que le système soit stable il faut $K_v > 0$ et $K_p > \frac{1}{K_1}$.

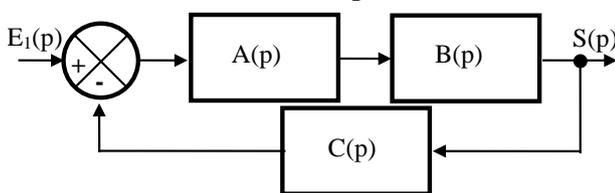
2.3 Etude de la stabilité des systèmes multi-variables

Dans le cas de systèmes multi-variables, on superpose deux modes :

- un 1^{er} mode pour lequel l'entrée $E_2(p)$ est considérée comme nulle et
- un 2nd mode pour lequel l'entrée $E_1(p)$ est considérée comme nulle.



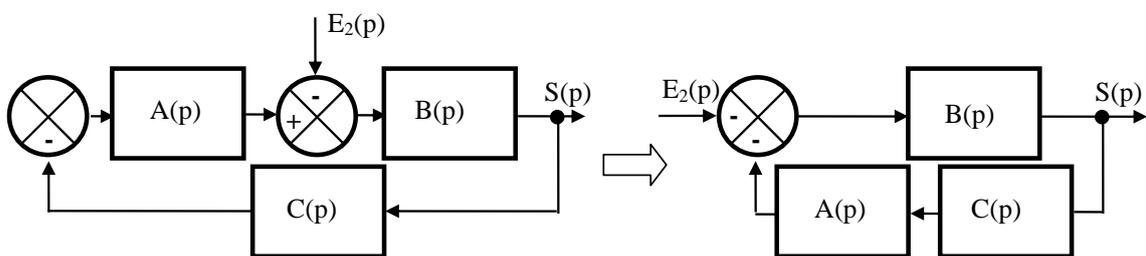
- Mode à entrée $E_2(p)=0$



$$H_1(p)|_{E_2(p)=0} = \frac{S(p)}{E_1(p)}|_{E_2(p)=0} = \frac{A(p) \cdot B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)}$$

$H_1(p)$ est appelée la fonction de transfert en poursuite.

- Mode à entrée $E_1(p)=0$



$$H_2(p)|_{E_1(p)=0} = \frac{S(p)}{E_2(p)}|_{E_1(p)=0} = \frac{-B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \text{ } H_2(p) \text{ est appelée la fonction de transfert en régulation.}$$

Le théorème de superposition permet d'obtenir la fonction de transfert en boucle fermée du système multi-variables :

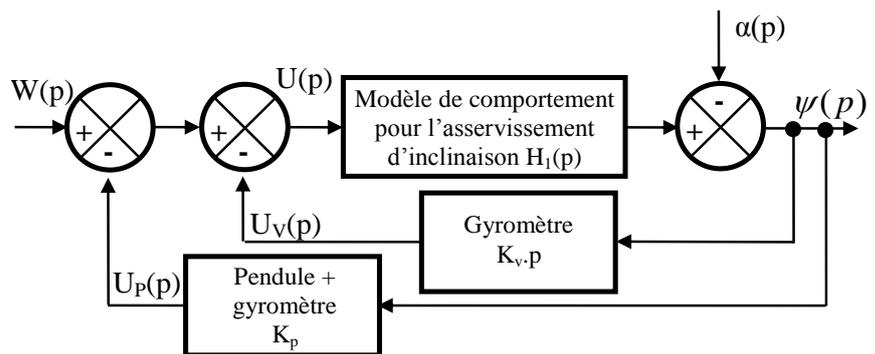
$$S(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_2(p)$$

On constate alors que le polynôme caractéristique de la FTBF D(p) est le même pour la fonction de transfert en poursuite S(p) / E₁(p) et la fonction de transfert en régulation S(p) / E₂(p). Les pôles des deux fonctions de transfert sont aussi par conséquent les mêmes. L'étude de stabilité du système comprenant les perturbations est donc la même que celle du système sans perturbation.

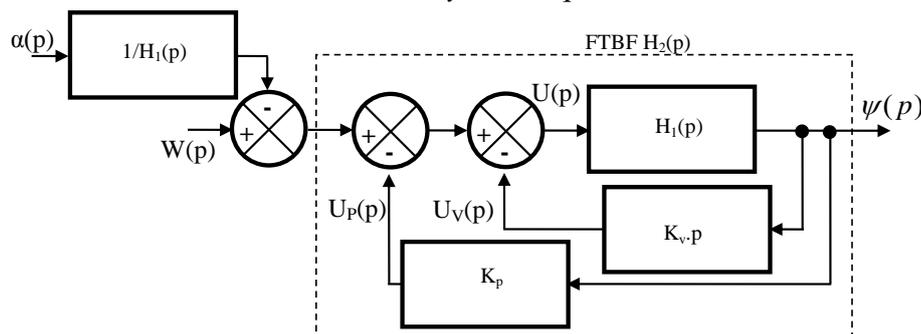
Pour étudier la stabilité d'un système multi variables, il suffit de regarder uniquement la stabilité de la fonction de transfert en poursuite S(p) / E₁(p).

Exemple de la chaine de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

Si le passager du scooter s'incline en avant ou en arrière il crée une perturbation modélisée par un angle $\alpha(p)$. Cette perturbation sera compensée par le système.



Après manipulation du schéma bloc on obtient le système équivalent suivant :



La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$\psi(p) = H_2(p).W(p) - \frac{1}{H_1(p)}.H_2(p).\alpha(p)$$

$$\psi(p) = \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.W(p) - \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.\alpha(p)$$

Soit
$$\psi(p) = \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.W(p) - \frac{1}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.\alpha(p)$$

Le polynôme caractéristique de la FTBF D(p) est le même pour la fonction de transfert en poursuite $\psi(p) / W(p)$ et la fonction de transfert en régulation $\psi(p) / \alpha(p)$. L'étude précédente de la stabilité sans la perturbation reste donc toujours valable et suffisante.

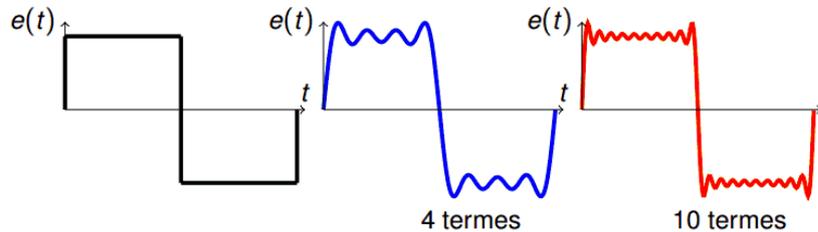
3 Étude de la stabilité à partir de critères graphiques sur la FTBO

Dans la pratique, l'étude de la stabilité des systèmes bouclés se fait plutôt graphiquement dans le domaine fréquentiel à partir de la FTBO.



Le fait que les critères soient fréquents ne doit pas conduire à penser que l'instabilité ne peut se produire que si l'entrée est sinusoïdale. En effet, tout signal d'entrée (un échelon par exemple) peut être décomposé en série de Fourier et donc être considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux couvrant un large spectre de pulsations.

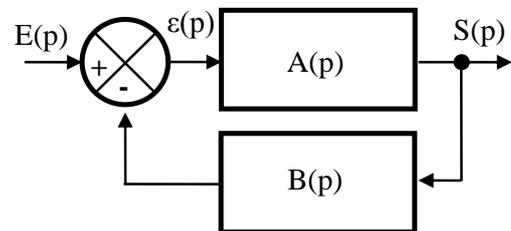
Exemple du créneau



3.1 Equation caractéristique et point critique – Définitions

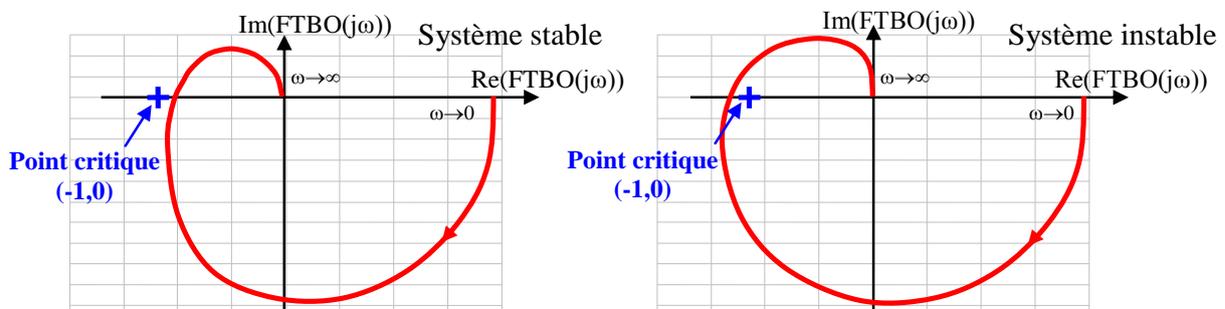
On appelle équation caractéristique d'un système bouclé ci-contre, l'expression $1 + FTBO(p) = 0$. Le système est en limite de stabilité si $FTBO(p) = -1$.

On appelle point critique le point du plan complexe d'affixe $z = -1$ (module 1 et argument -180°) et on constate que l'étude du dénominateur des FTBF revient en fait à analyser la FTBO par rapport au point critique.



3.2 Critère du revers dans le plan de Nyquist

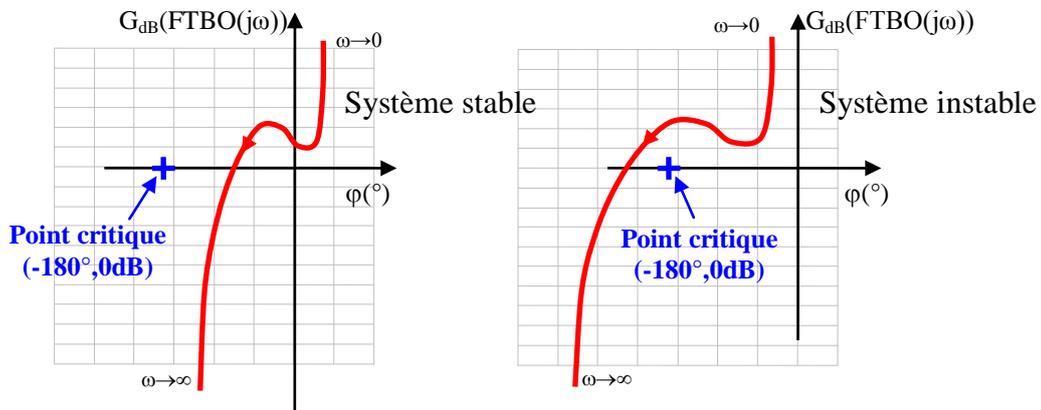
Un système asservi, stable en boucle ouverte, est stable en boucle fermée si et seulement si le point critique $(-1,0)$ est laissé à gauche lorsque l'on parcourt le lieu de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p)$ dans le sens des pulsations croissantes.



Si le lieu de transfert dans le plan de Nyquist de la FTBO passe sur le point critique alors le système est oscillant.

3.3 Critère du revers dans le plan de Black

Un système asservi, stable en boucle ouverte, est stable en boucle fermée si et seulement si le point critique $(-180^\circ, 0\text{dB})$ est laissé à **droite** lorsque l'on parcourt le lieu de Black de sa fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p) dans le sens des pulsations croissantes.



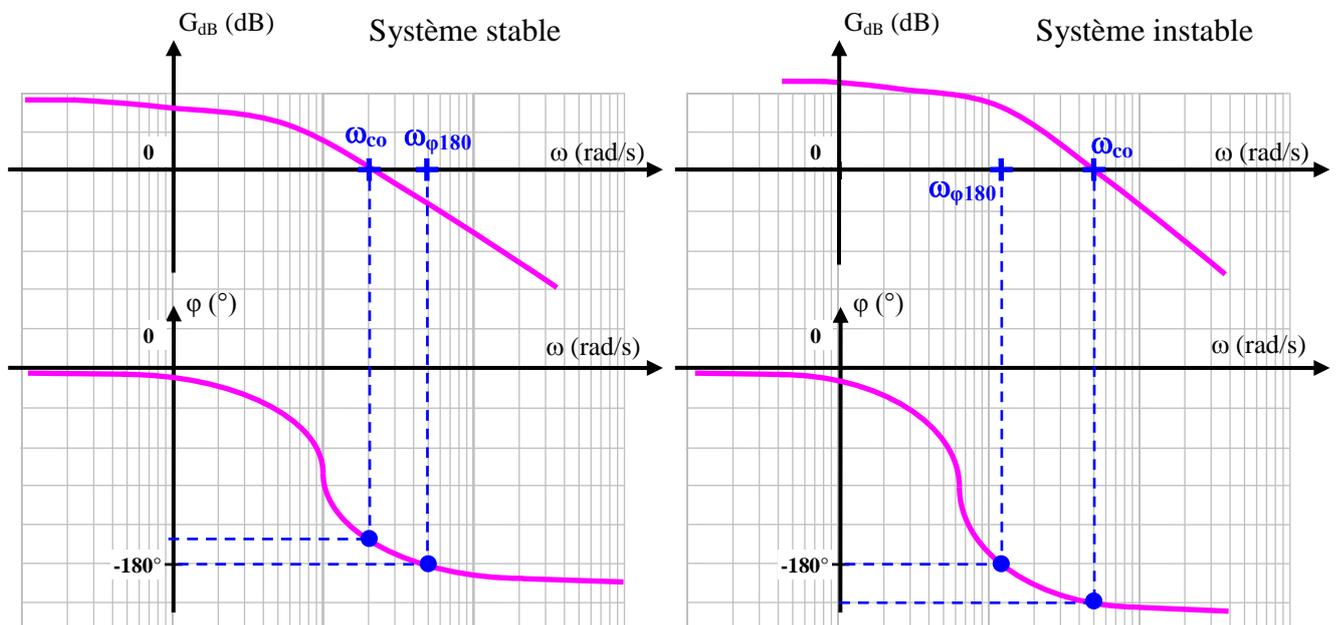
Si le lieu de transfert dans le plan de Black de la FTBO passe sur le point critique alors le système est oscillant.

3.4 Critère du revers dans le plan de Bode

Du fait de l'utilisation de deux diagrammes, il n'est plus possible de localiser le point critique, par conséquent l'analyse de la stabilité dans le plan de Bode est plus complexe que dans le plan de Black ou le plan de Nyquist.

Un système asservi, stable en boucle ouverte, est stable en boucle fermée si et seulement si :

- à la pulsation $\omega = \omega_{co}$ pour laquelle $|FTBO(j\omega_{co})|_{dB} = 0\text{dB}$, on a $\arg(FTBO(j\omega_{co})) > -180^\circ$;
- à la pulsation $\omega = \omega_{-180^\circ}$ pour laquelle $\arg(FTBO(j\omega_{-180^\circ})) = -180^\circ$, on a $|FTBO(j\omega_{-180^\circ})|_{dB} < 0\text{dB}$.



3.5 Limites du critère du revers

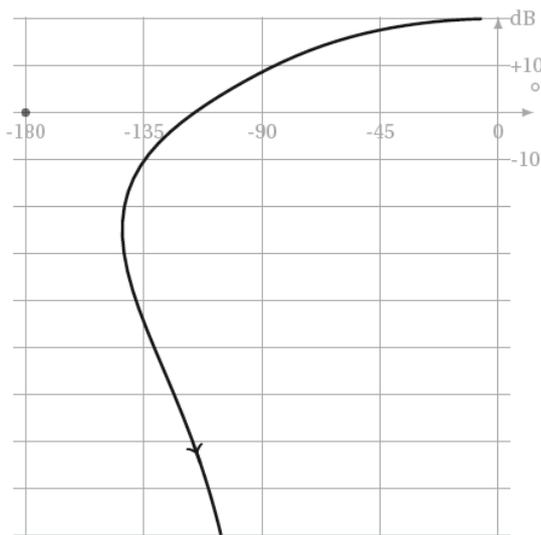
La plupart des systèmes rencontrés dans l'industrie ont en fait une FTBO dont les pôles sont à partie réelle strictement négative.



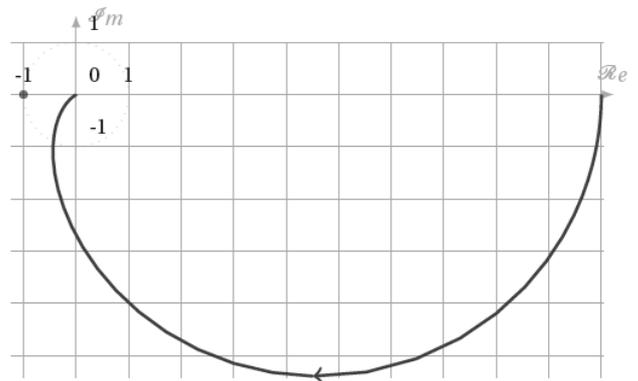
Le critère graphique du revers n'est valable que si la FTBO est stable, c'est-à-dire qu'elle possède des pôles à partie réelle strictement négative.

Exemple :

$$BO(p) = \frac{10}{(1 + 2 \cdot p) \cdot (1 - 0,1 \cdot p) \cdot (1 + \frac{p}{3}) \cdot (1 + 10 \cdot p)}$$



(a) diagramme de Black



(b) diagramme de Nyquist

Le diagramme de Black et le diagramme de Nyquist de la FTBO ci-dessus semblent indiquer que la FTBF est stable, mais le simple calcul des coefficients de la FTBF ci-dessous montre que le système est instable (coefficients négatifs, la condition nécessaire n'est pas remplie).

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} = -\frac{30}{-33 - 34 \cdot p - 35 \cdot p^2 + 52 \cdot p^3 + 20 \cdot p^4}$$

3.6 Marges de stabilité

En pratique, il est nécessaire de faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité, ceci pour plusieurs raisons :

- lors de la conception d'un système, de nombreuses hypothèses sont prises et les modèles de fonctions de transfert sont imprécis (non prise en compte des phénomènes non-linéaires, retards, ...) ;
- lors de l'utilisation du système, les composants électroniques (résistances, amplificateurs, ...) ont des caractéristiques qui évoluent avec le temps (température, vieillissement...) ;
- on constate que le comportement temporel est d'autant plus oscillant que le tracé est proche du point critique.

Il est donc nécessaire de prévoir des « marges » vis à vis du problème d'instabilité qui « garantissent » que le point critique ne sera jamais atteint.

Marge de phase

La marge de phase est définie telle que $M_\phi = 180^\circ + \arg(FTBO(j\omega_{co}))$ où ω_{co} est la pulsation de coupure pour laquelle $|FTBO(j\omega_{co})| = 0dB$.



On cherche généralement à obtenir une marge de phase de 45° (valeur empirique) qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

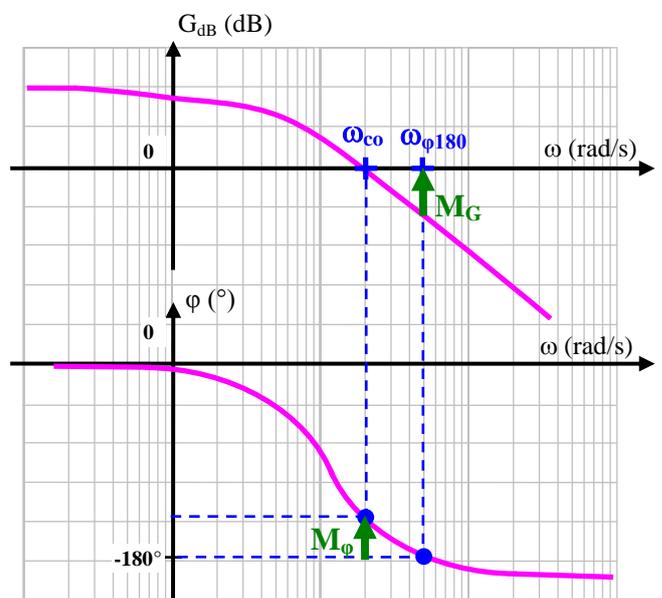
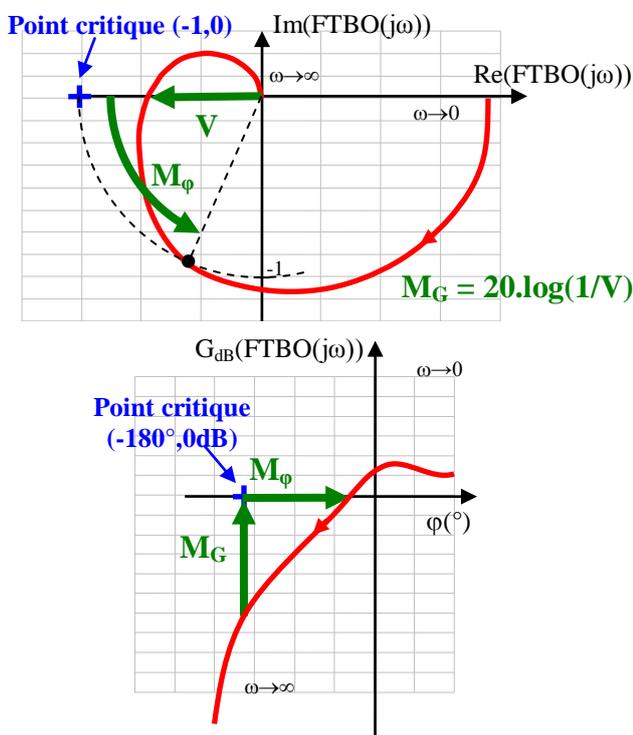
Marge de gain

La marge de gain est définie telle que $M_G = -20\log|FTBO(j\omega_{-180^\circ})|$ où ω_{-180° est la pulsation pour laquelle $\arg(FTBO(j\omega_{-180^\circ})) = -180^\circ$.



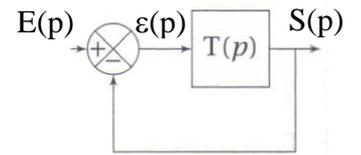
Une marge de gain de 6dB permet une latitude d'un facteur 2 sur le gain en boucle ouverte. La valeur retenue est généralement comprise entre 10 et 15 dB.

Illustrations des marges de gain et de phase dans le plan de Nyquist, de Black et de Bode



3.7 Facteur de résonance – Abaque de Black-Nichols

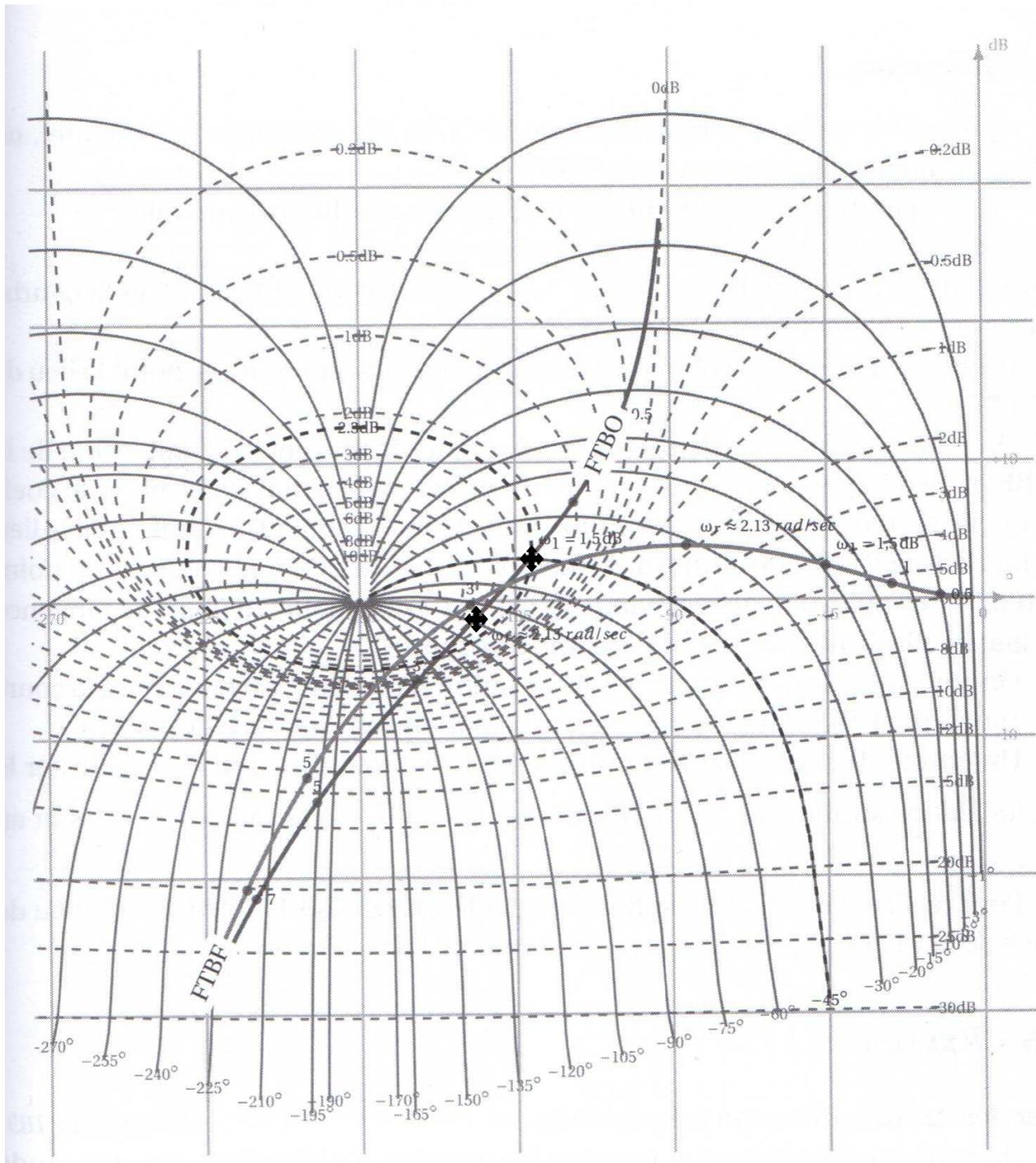
L'abaque de Black-Nichols permet à partir de la connaissance du lieu de transfert dans le plan de Black de la Fonction de Transfert en Boucle ouverte (FTBO) d'un système à retour unitaire, d'obtenir le lieu de transfert dans le plan de Black de la Fonction de transfert en Boucle fermée (FTBF).



Rappel : On peut écrire pour un système asservi à retour unitaire :

$$FTBO(p) = \frac{S(p)}{\epsilon(p)} = T(p)$$

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$



La fonction complexe $z \rightarrow \frac{z}{1+z}$ permet donc le passage de la FTBO à la FTBF à retour unitaire :

$$FTBO \rightarrow \frac{FTBO}{1+FTBO}$$

L'abaque de Black-Nichols est constitué des deux réseaux de courbe déduits de cette fonction :

- Le premier, le réseau iso-module, $\left| \frac{z}{1+z} \right| = cte$ gradué en dB permet d'obtenir le gain de la FTBF pour chaque pulsation de la FTBO, ce réseau de courbes est "centré" par rapport au point $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$;
- Le second, le réseau iso-phase, $\arg\left(\frac{z}{1+z}\right) = cte$ gradué en degré permet d'obtenir l'argument de la FTBF à partir de la FTBO, ce réseau de courbes "rayonne" depuis le point $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$.

Utilisation

Après avoir tracé le lieu de Black de la FTBO (figure page précédente), on relève pour chaque pulsation de la FTBO :

- la valeur du gain de la FTBF sur le réseau de courbes iso-modules,
- la valeur du déphasage de la FTBF sur le réseau de courbes iso-phases.

Ainsi, pour la pulsation $\omega = 1,5 \text{ rad/s}$, la courbe iso-module 2,3dB et la courbe iso-argument -45° interceptent ce point.

Les coordonnées ainsi obtenues permettent de tracer point par point le lieu de la FTBF

On peut aussi à partir de cette lecture obtenir le maximum d'amplitude de la FTBF, et en déduire la présence ou non d'une résonance puis déterminer le coefficient de surtension. Pour que la FTBF possède une résonance, il suffit que le lieu de Black de la FTBO coupe une des courbes iso-modules fermées autour du point $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$. La pulsation de résonance de la FTBF correspond au point de tangence du lieu de Black avec une courbe iso-module fermée.

On constate que pour l'exemple, à la pulsation 2,13 rad/s, la courbe de la FTBO est tangente à la courbe iso-module à 4dB, cette pulsation, est la pulsation de résonance de la FTBF.

Un critère de réglage souvent utilisé pour un système asservi est d'ajuster le facteur de surtension (ou de résonance) $Q_r = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(j\omega)_{\omega \rightarrow 0}|} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$ à la valeur $Q_r = 1,3$ soit en dB $Q_r \text{ dB} = 2,3 \text{ dB}$.

Pour réaliser ce réglage, il suffit de régler le gain de la FTBF afin que le lieu de black de la FTBO tangente le contour à 2,3 dB de l'abaque de Black (voir exercice).

Cette procédure est plus globale que le simple réglage de la marge de phase et de la marge de gain. En effet ce réglage ne s'intéresse pas uniquement aux intersections de la FTBO avec l'axe des abscisses et la droite d'ordonnée -180° mais à la distance de la FTBO au point critique dans toutes les directions.