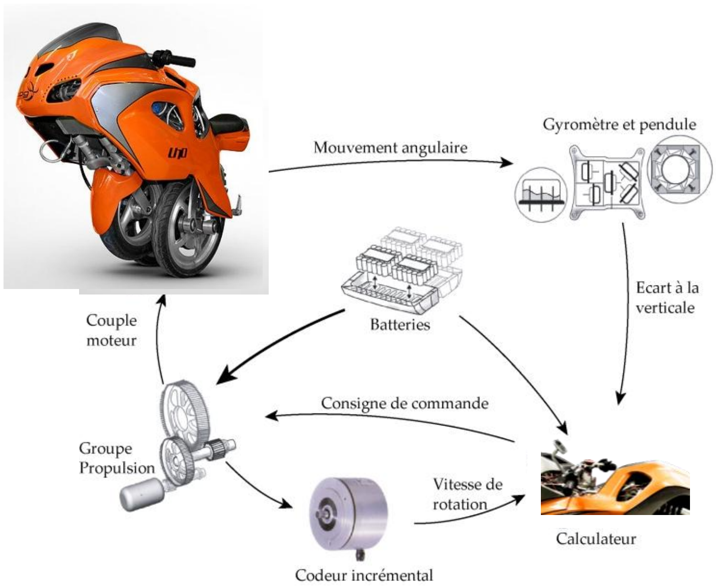
Évaluation des performances des systèmes asservis modélisés en SLCI : Précision

Sommaire

Exemple de système asservi : **BPG Uno Scooter Concept**

Uno I (Concept initial)

Uno III
mode auto balancé



Uno III mode 2 roues
(http://bpg-motors.com/)

On quantifie les performances de stabilité, précision et rapidité d'un système asservi, selon l'évaluation de 3 critères que sont respectivement les dépassements, l'erreur et le temps de réponse à 5%. Si le système asservi est stable, on peut alors quantifier la rapidité et la précision de celui-ci.

L'objectif de ce cours est de présenter les éléments intervenant sur la précision des systèmes ainsi que les outils permettant de l'évaluer (indépendamment des autres performances).

1 Définitions – Précision, erreur et image de l'erreur, erreur statique

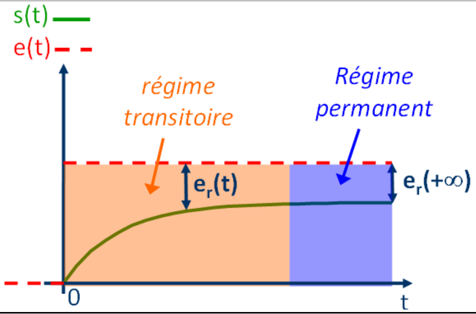
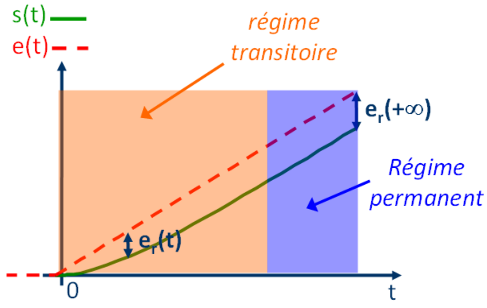
1.1 Erreur et erreur statique

La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur souhaitée.

On définit ***<u>l'erreur ou écart</u>*** *à l'instant t* notée $\boldsymbol{e_r(t)}$ par: $\boxed{\begin{array}{c} e_r(t) = e(t) - s(t) \\ e(t): \text{entrée et } s(t): \text{sortie} \end{array}}$

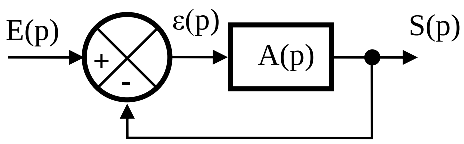
La précision est alors caractérisée en régime permanent par ***<u>l'erreur statique</u>*** $\boxed{e_r(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)}$

Si l'erreur en régime permanent est nulle, on dit que le système est précis.

<table>
<tr><th>Erreur et erreur statique pour une entrée en échelon.</th><th>Erreur et erreur statique pour une entrée en rampe.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

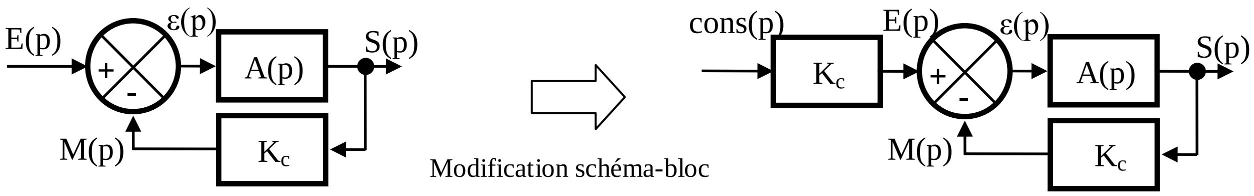
1.2 Image de l'erreur

<u>Dans le cas d'un système bouclé à retour unitaire</u>, l'image de l'erreur ε(t) en sortie de comparateur correspond à la différence entre l'entrée et la sortie soit ε(t) = e(t) – s(t) ou dans le domaine de Laplace ε(p) = E(p) – S(p). L'erreur $e_r(t)$ et l'image de l'erreur ε(t) sont donc identiques et s'expriment dans la même unité que la grandeur de sortie.



$E_r(p) = \varepsilon(p) = E(p) - S(p)$

<u>Si le système n'est pas à retour unitaire</u>, il faut modifier le schéma bloc de telle sorte que l'on puisse faire apparaitre une consigne cons(t) de même nature que la sortie s(t).



L'erreur $e_r(t)$ correspond alors à la différence entre cons(t) et s(t) : $e_r(t)$ = cons(t) – s(t) ou dans le domaine de Laplace $E_r(p)$ = Cons(p) – S(p).

L'image de l'erreur correspond ici à la différence entre e(t) et m(t) soit ε(t) = e(t) – m(t) ou dans le domaine de Laplace ε(p) = E(p) – M(p) soit :

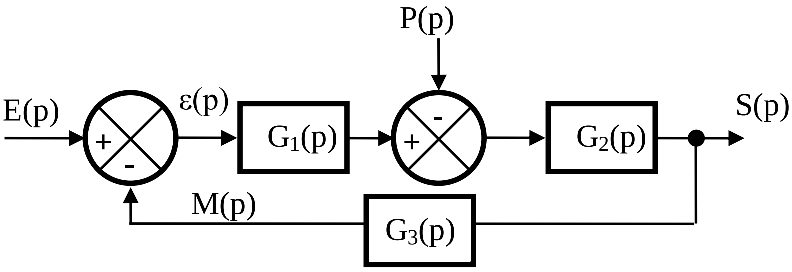
$$\varepsilon(p) = K_c.\mathrm{Cons}(p) - K_c.S(p)$$
$$\varepsilon(p) = K_c.(\mathrm{Cons}(p) - S(p)) = K_c.E_r(p)$$

> On constate donc que dans le cas d'un système bouclé à retour non unitaire les valeurs de l'erreur $e_r(t)$ et de l'image de l'erreur ε(t) ne sont pas égales. **Toutefois, elles sont proportionnelles et les considérations qualitatives sur l'évolution de l'erreur peuvent être obtenues par analyse de l'image de l'erreur.**

On utilise donc dans ce cas l'erreur relative : $\boxed{e_{r\%}(t) = \dfrac{cons(t) - s(t)}{cons(t)} = \dfrac{e(t) - m(t)}{e(t)} = \varepsilon_{r\%}(t)}$

2 Détermination de l'image de l'erreur.

Soit un système asservi, avec pour entrée E(p) et perturbation P(p) :



Le théorème de superposition permet d'obtenir la sortie du système multi-variables :

$$S(p)=\frac{G_1(p).G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p).G_3(p)}.E(p)-\frac{G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p).G_3(p)}.P(p)$$

L'image de l'erreur ε(p) s'exprime : $\varepsilon(p)=E(p)-M(p)=E(p)-G_3(p).S(p)$

$$\varepsilon(p)=E(p)-G_3(p)\cdot\frac{G_1(p).G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p).G_3(p)}.E(p)+G_3(p)\cdot\frac{G_2(p)}{1+G_1(p).G_2(p).G_3(p)}.P(p)$$

Soit : $\varepsilon(p)=\dfrac{1}{1+G_1(p).G_2(p).G_3(p)}.E(p)+\dfrac{G_2(p).G_3(p)}{1+G_1(p).G_2(p).G_3(p)}.P(p)$

Le terme de l'image de l'erreur qui dépend de E(p) correspond à « l'erreur en poursuite ».
Le terme de l'image de l'erreur qui dépend de P(p) correspond à « l'erreur en régulation ».
Après avoir étudié séparément ces deux erreurs (voir paragraphes suivant), nous utiliserons le théorème de superposition qui permettra de les sommer dans le domaine temporel.
Un système doit être précis vis à vis de l'entrée, mais également insensible aux perturbations. Ces dernières ne doivent pas dégrader sa réponse finale.

3 Étude de l'erreur en poursuite (perturbation nulle et influence de l'entrée)

P(p) =0 donc $\varepsilon(p)=\dfrac{1}{1+G_1(p).G_2(p).G_3(p)}.E(p)=\dfrac{1}{1+FTBO(p)}.E(p)$ (voir paragraphe 2)

Pour se placer dans le cas général, on utilise la fonction de transfert FTBO du système du type :

$FTBO(p)=\dfrac{M(p)}{\varepsilon(p)}=\dfrac{K.(1+b_1.p+...+b_m.p^m)}{p^\alpha.(1+a_1.p+...+a_n.p^{n-\alpha})}=\dfrac{K}{p^\alpha}.\dfrac{N(p)}{D(p)}$ et $\alpha\geq 0$.

(avec α : classe de la FTBO, n : ordre de la FTBO, K : gain statique de la FTBO et $\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{N(p)}{D(p)}=1$).

L'image de l'erreur statique se calcule en utilisant le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon(+\infty)=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\varepsilon(p)=\lim_{p\to 0}pE(p).\frac{1}{1+FTBO(p)}\longrightarrow\varepsilon(+\infty)=\lim_{p\to 0}p.E(p).\frac{1}{1+\frac{K}{p^\alpha}}$$

En conclusion, l'image de l'erreur statique (et donc l'erreur statique) dépend de la nature de l'entrée E(p), de la classe α de la FTBO et du gain K de la FTBO.

3.1 Réponse à une impulsion

L'entrée est une impulsion e(t) = δ(t) → E(p) = 1 → $\varepsilon(+\infty) = \lim_{p \to 0} p.1.\dfrac{1}{1+\dfrac{K}{p^{\alpha}}}$ → $\varepsilon(+\infty) \cong 0$.

Quelque soit la classe du système, celui-ci est précis

3.2 Réponse à un échelon - Erreur de position ou erreur indicielle

L'entrée est un échelon e(t) = a.u(t) → E(p) = $\dfrac{a}{p}$ → $\varepsilon(+\infty) = \lim_{p \to 0} p.\dfrac{a}{p}.\dfrac{1}{1+\dfrac{K}{p^{\alpha}}}$ → $\varepsilon(+\infty) \cong \dfrac{a}{1+\dfrac{K}{p^{\alpha}}}$.

- Pour un système de classe 0 (α = 0) → $\varepsilon(+\infty) = \dfrac{a}{1+K}$
- Pour un système de classe >0 (α ≥ 1) → $\varepsilon(+\infty) = 0$

3.3 Réponse à une rampe - Erreur de vitesse ou erreur de traînage

L'entrée est une rampe e(t) = a.t.u(t) → E(p) = $\dfrac{a}{p^2}$ → $\varepsilon(+\infty) = \lim_{p \to 0} p.\dfrac{a}{p^2}.\dfrac{1}{1+\dfrac{K}{p^{\alpha}}}$ → $\varepsilon(+\infty) \cong \dfrac{a}{p}.\dfrac{1}{1+\dfrac{K}{p^{\alpha}}}$.

- Pour un système de classe 0 (α = 0) → $\varepsilon(+\infty) = +\infty$
- Pour un système de classe 1 (α = 1) → $\varepsilon(+\infty) = \dfrac{a}{K}$
- Pour un système de classe 2 (α = 2) → $\varepsilon(+\infty) = 0$

3.4 Réponse à une consigne parabolique - Erreur en accélération

L'entrée est une parabole e(t) = a.$\dfrac{t^2}{2}$.u(t) → E(p) = $\dfrac{a}{p^3}$ → $\varepsilon(+\infty) = \lim_{p \to 0} p.\dfrac{a}{p^3}.\dfrac{1}{1+\dfrac{K}{p^{\alpha}}}$ → $\varepsilon(+\infty) \cong \dfrac{a}{p^2}.\dfrac{1}{1+\dfrac{K}{p^{\alpha}}}$.

- Pour un système de classe 0 (α = 0) → $\varepsilon(+\infty) = +\infty$
- Pour un système de classe 1 (α = 1) → $\varepsilon(+\infty) = +\infty$
- Pour un système de classe 2 (α = 2) → $\varepsilon(+\infty) = \dfrac{a}{K}$

3.5 Bilan sur l'image de l'erreur statique lors d'un problème de poursuite $\varepsilon(+\infty)_{poursuite}$

$\varepsilon(+\infty)_{poursuite}$	**FTBO de classe 0 (α = 0)** $FTBO(p) = K.\dfrac{N(p)}{D(p)}$	**FTBO de classe 1 (α = 1)** $FTBO(p) = \dfrac{K}{p}.\dfrac{N(p)}{D(p)}$	**FTBO de classe 2 (α = 2)** $FTBO(p) = \dfrac{K}{p^2}.\dfrac{N(p)}{D(p)}$
Erreur pour une impulsion	0	0	0
Erreur de position ou erreur indicielle	$\dfrac{a}{1+K}$	0	0
Erreur de vitesse ou erreur de trainage	$+\infty$	$\dfrac{a}{K}$	0
Erreur en accélération	$+\infty$	$+\infty$	$\dfrac{a}{K}$
Commentaires	**0 intégration : système peu précis mais stable**	**1 intégration : précision acceptable et stabilité moyenne**	**2 intégrations : système très précis mais délicat à stabiliser**

Au concours les résultats synthétisés dans le tableau précédent peuvent être utilisés sans démonstration. Il faut donc connaitre par cœur ce tableau.

- Plus le nombre d'intégrateur est grand (plus la classe de la FTBO est importante) plus la précision est bonne. Si l'erreur statique n'est pas nulle, il est possible d'ajouter dans le système un ou plusieurs intégrateurs (correcteur intégral). Attention tout de même, car chaque intégration ajoute aussi un déphasage de -90°, le système risque donc de devenir instable.
- Si l'erreur statique est finie et non nulle, l'erreur statique sera d'autant plus petite que le gain statique K de la FTBO sera grand. Il est donc possible d'ajouter dans le système un gain pour minimiser l'erreur statique (correcteur proportionnel).

4 Étude de l'erreur en régulation (entrée nulle et influence d'une perturbation)

E(p) =0 donc $\varepsilon(p) = \dfrac{G_2(p).G_3(p)}{1+G_1(p).G_2(p).G_3(p)}.P(p)$ (voir paragraphe 2)

Pour se placer dans le cas général on utilise des fonctions de transfert $G_i(p)$ écrites sous forme canonique : $G_i(p) = \dfrac{K_i}{p^{\alpha_i}}.\dfrac{N_i(p)}{D_i(p)}$ où $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{N_i(p)}{D_i(p)} = 1$ et $\alpha_i \geq 0$.

(avec α_i : classe de G_i, n_i : ordre de G_i, K_i : gain statique de G_i).

L'image de l'erreur statique se calcule en utilisant le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p.P(p).\frac{\dfrac{K_2}{p^{\alpha_2}}.\dfrac{N_2(p)}{D_2(p)}.\dfrac{K_3}{p^{\alpha_3}}.\dfrac{N_3(p)}{D_3(p)}}{1+\dfrac{K_1}{p^{\alpha_1}}.\dfrac{N_1(p)}{D_1(p)}.\dfrac{K_2}{p^{\alpha_2}}.\dfrac{N_2(p)}{D_2(p)}.\dfrac{K_3}{p^{\alpha_3}}.\dfrac{N_3(p)}{D_3(p)}} = \lim_{p \to 0} p.P(p).\frac{\dfrac{K_2}{p^{\alpha_2}}.\dfrac{K_3}{p^{\alpha_3}}}{1+\dfrac{K_1}{p^{\alpha_1}}.\dfrac{K_2}{p^{\alpha_2}}.\dfrac{K_3}{p^{\alpha_3}}}$$

Si on considère que la fonction de transfert de la perturbation est du type $\boxed{P(p) = \dfrac{a}{p^q}}$ (q est la classe de la perturbation) alors $\varepsilon(+\infty) = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{a}{p^{q-1}}.\dfrac{K_2.K_3.p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+K_1.K_2.K_3}$.

4.1 Bilan sur l'image de l'erreur statique lors d'un problème de régulation $\varepsilon(+\infty)_{regulation}$

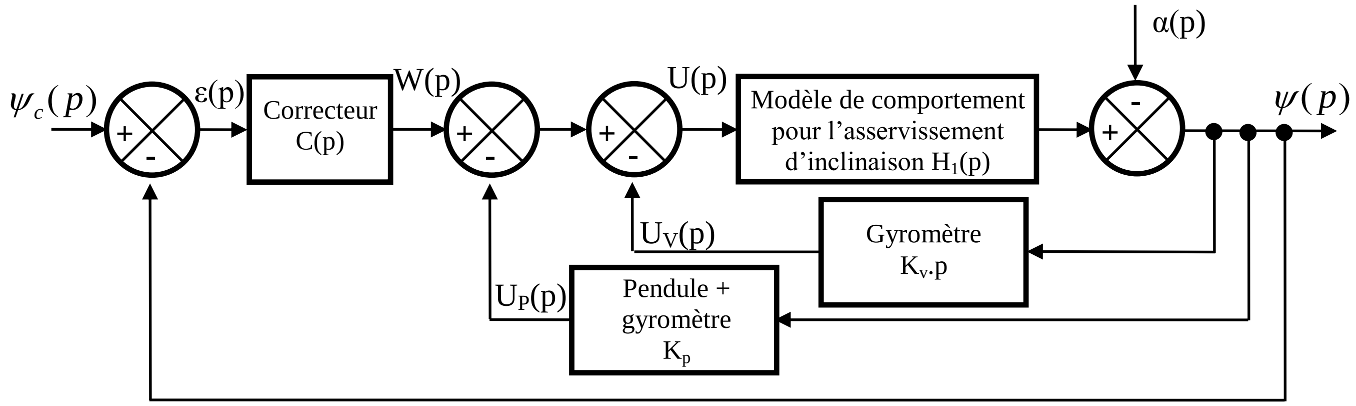
$\varepsilon(+\infty)_{regulation}$	**G_1 de classe 0 ($\alpha_1 = 0$)**	**G_1 de classe 1 ($\alpha_1 = 1$)**	**G_1 de classe 2 ($\alpha_1 = 2$)**
Perturbation impulsionnelle	0	0	0
Perturbation indicielle	$\dfrac{a}{K_1}$ (ou $\dfrac{a \cdot K_2 \cdot K_3}{1+K_1 \cdot K_2 \cdot K_3}$ si $\alpha_2+\alpha_3=0$)	0	0
Perturbation en rampe	$+\infty$	$\dfrac{a}{K_1}$	0
Perturbation en parabole	$+\infty$	$+\infty$	$\dfrac{a}{K_1}$

α_1 : classe de FT allant de l'entrée du système à la perturbation

Au concours <u>la perturbation est souvent modélisée par un échelon</u>, par conséquent :

- **s'il n'y a pas d'intégrateur dans la boucle ouverte en amont de la perturbation, la perturbation provoque une erreur en régulation constante. Pour réduire cette erreur, on augmente le gain en amont de cette perturbation ;**
- **s'il y a un intégrateur dans la boucle ouverte en amont de la perturbation, l'erreur en régulation est nulle.**

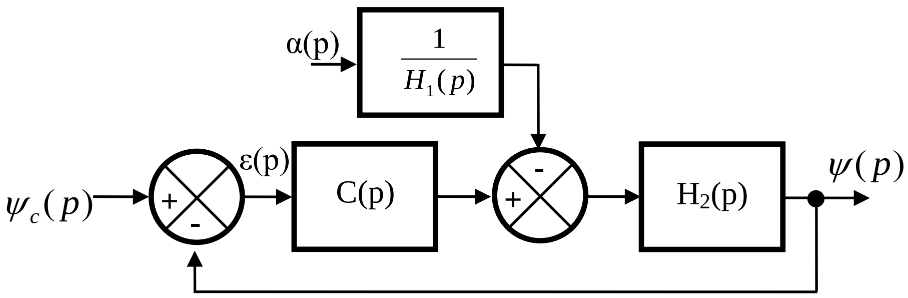
Application sur la chaine de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :



Avec : $C(p) = K_c$; $H_2(p)=\dfrac{K_2}{\dfrac{1}{\omega_2^{\,2}}.p^2+\dfrac{2.z_2}{\omega_2}.p+1}$; $H_1(p)=\dfrac{K_1}{\dfrac{1}{\omega_1^{\,2}}.p^2-1}$ *et* $\alpha(p) = \dfrac{\alpha_0}{p}$ *(échelon).*

La régulation d'inclinaison du scooter consiste à maintenir l'inclinaison ψ(t) en régime permanent quelque soit l'inclinaison du conducteur α(t) $\rightarrow \lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$.

Dans ces conditions l'erreur en régulation $e_{r(regulation)}(+\infty)$ *en régime permanent doit être nulle quelque soit la perturbation α(t). Pour calculer cette erreur en régulation il faut modifier dans un premier temps le schéma bloc du système. L'erreur en régulation se calcule pour* $\psi_c(p) = 0$*.*



En appliquant le théorème de superposition la sortie s'écrit :

$$\psi(p)=\frac{C(p).H_2(p)}{1+C(p).H_2(p)}\psi_c(p)-\frac{1}{H_1(p)}.\frac{H_2(p)}{1+C(p).H_2(p)}\alpha(p)=-\frac{1}{H_1(p)}.\frac{H_2(p)}{1+C(p).H_2(p)}\alpha(p)$$

(pour $\psi_c(p)$ *nul).*

L'image de l'erreur ε(p) s'exprime alors : $\varepsilon(p) = \psi_c(p) - \psi(p) = \dfrac{1}{H_1(p)}.\dfrac{H_2(p)}{1+C(p).H_2(p)}\alpha(p)$ *et*

l'erreur en régulation : $\varepsilon(+\infty)_{regulation} = \lim\limits_{p\to 0} p.\alpha(p).\dfrac{1}{H_1(p)}.\dfrac{H_2(p)}{1+C(p).H_2(p)}$.

Soit : $\varepsilon(+\infty)_{regulation} = \lim\limits_{p\to 0} \alpha_0.\dfrac{1}{\dfrac{K_1}{\dfrac{1}{\omega_1^2}.p^2-1}}.\dfrac{\dfrac{K_2}{\dfrac{1}{\omega_2^2}.p^2+\dfrac{2.z_2}{\omega_2}.p+1}}{1+K_c.\dfrac{K_2}{\dfrac{1}{\omega_2^2}.p^2+\dfrac{2.z_2}{\omega_2}.p+1}} = \dfrac{-K_2.\alpha_0}{K_1.(1+K_c.K_2)} \neq 0$

L'erreur en régulation est non nulle. Ce résultat était prévisible puisqu'il n'y a pas d'intégration en amont de la perturbation. Pour annuler cette erreur en régulation pour une perturbation modélisée par un échelon, il faut modifier le correcteur C(p) en utilisant un correcteur intégral (de classe 1) plutôt qu'un correcteur proportionnel.

5 Conclusion

Dans tous les cas de figure, on voit qu'il faut des intégrateurs dans la boucle pour annuler l'image de l'erreur ε(t). Si le système à commander n'en possède pas (ou pas assez), on peut les apporter avec un correcteur. Cela semble donc facile d'obtenir un système bouclé précis. Cependant, il ne faut pas perdre de vue qu'il faut aussi et surtout que le système bouclé soit stable. Or l'effet d'un intégrateur sur la phase de la FTBO sera d'apporter – 90° quelle que soit la valeur de ω. On peut se douter que perdre 90° aura forcément un effet négatif sur la marge de phase Mφ (qui pourra même devenir négative) et donc sur la stabilité.
La démonstration précédente permet de mettre le doigt sur un dilemme que l'automaticien a toujours à l'esprit : il faudra faire un compromis entre la stabilité (ou plutôt les marges de stabilité) et la précision.