Chargeur d'outils de MOCN - Corrigé

Q.1. L'ensemble 2 = bras pivotant S + deux outils E montés symétriquement possède deux plans de symétrie perpendiculaires → la matrice d'inertie de l'ensemble est diagonale → $\overline{\overline{I_{O_1}(2)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(b1)}^{O_1}$

On décompose en solides élémentaires

la matrice d'inertie de la plaque de centre de gravité O_1 est :

$$\overline{\overline{I_{O_1}(S)}} = \begin{pmatrix} \frac{m_S}{12}.\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_S}{12}.\left(e^2+b^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_S}{12}.\left(c^2+e^2\right) \end{pmatrix}_{(b1)}^{O_1}$$

b_1 est ici base principale.

Un outil + son porte outil constitue l'ensemble E de centre de gravité G et sa matrice d'inertie est :

$$\overline{\overline{I_G(E)}} = \begin{pmatrix} I_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{pmatrix}_{(b1)}^{G}$$

Il faut transporter la matrice d'inertie en O_1 pour faire l'assemblage.

$$\overline{\overline{I_{O_1}(E)}} = \overline{\overline{I_G(E)}} + \overline{\overline{I_{O_1}(m_E \to G)}}$$

(Seuls les termes diagonaux sont à calculer puisque la matrice finale est diagonale).

$$A = I_{Gx} + m_E.{y_G}^2$$

$$B = I_{Gy} + m_E.{x_G}^2$$

$$C = I_{Gz} + m_E.({y_G}^2 + {x_G}^2)$$

On assemble les matrices exprimées dans la même base et au même point.

$$\overline{\overline{I_{O_1}(2)}} = \begin{pmatrix} \frac{m_S}{12}.\left(b^2+c^2\right)+2.I_{Gx}+2.m_E.{y_G}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_S}{12}.\left(e^2+b^2\right)+2.I_{Gy}+2.m_E.{x_G}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_S}{12}.\left(c^2+e^2\right)+2.I_{Gz}+2.m_E.({y_G}^2+{x_G}^2) \end{pmatrix}_{(b1)}^{O_1}$$

Q.2. L'ensemble 2 = bras pivotant S + un outil E possède un plan de symétrie (plan $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$) → L'axe $(O_1, \vec{z}_1)$ est axe principal d'inertie → D = E = 0 → $\overline{\overline{I_{O_1}(2)}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O_1 (b1)}$

⇩

On décompose en solides élémentaires

⇙ ⇘

la matrice d'inertie de la plaque de centre de gravité O_1 reste la même que question 1.

Un outil + son porte outil constitue l'ensemble E de centre de gravité G et sa matrice d'inertie est :

$$\overline{\overline{I_G(E)}} = \begin{pmatrix} I_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{pmatrix}_{G (b1)}$$

Il faut transporter la matrice d'inertie en O_1 pour faire l'assemblage.

$$\overline{\overline{I_{O_1}(E)}} = \overline{\overline{I_G(E)}} + \overline{\overline{I_{O_1}(m_E \to G)}}$$

Idem que la question 1 avec F en plus.

$$F = 0 + m.x_G.y_G$$

On assemble les matrices exprimées dans la même base et au même point.

$$\overline{\overline{I_{O_1}(2)}} = \begin{pmatrix} \frac{m_S}{12}.\left(b^2 + c^2\right) + I_{Gx} + m_E.{y_G}^2 & -m_E.x_G.y_G & 0 \\ -m_E.x_G.y_G & \frac{m_S}{12}.\left(e^2 + b^2\right) + I_{Gy} + m_E.{x_G}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_S}{12}.\left(c^2 + e^2\right) + I_{Gz} + m_E.({y_G}^2 + {x_G}^2) \end{pmatrix}_{O_1 (b1)}$$

Propriétés inertielles d'un lanceur spatial – Corrigé

Q.1. Recherche des centres de gravité :

$\overrightarrow{OG_1} = (c + \frac{L}{2}).\vec{z}$ $\overrightarrow{OG_2} = (c - b + \frac{l}{2}).\vec{z} - a.\vec{x}$ $\overrightarrow{OG_3} = (c - b + \frac{l}{2}).\vec{z} + a.\vec{x}$

Q.2. $M_t = M + 2.m$

Recherche du centre de gravité G_t :

Le système possède 2 plans de symétrie perpendiculaires → $x_{Gt} = y_{Gt} = 0$
On utilise ensuite la formule du barycentre $M_t.\overrightarrow{OG_t} = \sum_i m_i.\overrightarrow{OG_i}$ projetée sur l'axe $\vec{z}$:

$$M_t.z_{Gt} = \sum_i m_i.z_{Gi} \rightarrow M_t.z_{Gt} = M.(c + \frac{L}{2}) + 2.m(c - b + \frac{l}{2}) \rightarrow z_{Gt} = \frac{M.(c + \frac{L}{2}) + 2.m(c - b + \frac{l}{2})}{M_t}$$

Q.3. Solide 1 : $\overline{\overline{I_{G_1}(1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(b)}$ Solides 2 et 3 : $\overline{\overline{I_{G_2}(2)}} = \overline{\overline{I_{G_3}(3)}} = \begin{pmatrix} A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & C_{23} \end{pmatrix}_{(b)}$

$A_1 = \frac{M \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot L^2}{12}$; $C_1 = \frac{M \cdot R^2}{2}$

$A_{23} = \frac{m \cdot (r_e^2 + r_i^2)}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$; $C_{23} = \frac{m \cdot (r_e^2 + r_i^2)}{2}$

Q.4. $\overrightarrow{OG_t} = z_{Gt}.\vec{z}$ $\overrightarrow{OG_1} = (c + \frac{L}{2}).\vec{z}$ $\overrightarrow{OG_2} = (c - b + \frac{l}{2}).\vec{z} - a.\vec{x}$ $\overrightarrow{OG_3} = (c - b + \frac{l}{2}).\vec{z} + a.\vec{x}$

Le système possède 2 plans de symétrie perpendiculaires → la matrice est diagonale →

$$\overline{\overline{I_{O_1}(1+2+3)}} = \begin{pmatrix} I_{O_1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O_1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O_1z} \end{pmatrix}_{(b)}$$

⇩

On décompose en solides élémentaires

⇙ ⇘

Solide 1 : $\overline{\overline{I_{G_1}(1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(b)}$

Solides 2 et 3 : $\overline{\overline{I_{G_2}(2)}} = \overline{\overline{I_{G_3}(3)}} = \begin{pmatrix} A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & C_{23} \end{pmatrix}_{(b)}$

Il faut transporter la matrice d'inertie en G_t pour faire l'assemblage.

On a $\overrightarrow{G_tG_1} = \overrightarrow{G_tO} + \overrightarrow{OG_1} = -z_t.\vec{z} + (c + \frac{L}{2}).\vec{z}$

(Seuls les termes diagonaux sont à calculer puisque la matrice finale est diagonale).

$$\overline{\overline{I_{G_t}(1)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(b)} \text{ avec :}$$

$$A = A_1 + m.(c + \frac{L}{2} - z_t)^2$$

$$B = A_1 + m.(c + \frac{L}{2} - z_t)^2$$

$$C = C_1$$

Il faut transporter la matrice d'inertie en G_t pour faire l'assemblage.

On a $\overrightarrow{G_tG_2} = \overrightarrow{G_tO} + \overrightarrow{OG_2} = -z_t.\vec{z} + (c - b + \frac{l}{2}).\vec{z} - a.\vec{x}$ et

$\overrightarrow{G_tG_3} = \overrightarrow{G_tO} + \overrightarrow{OG_3} = -z_t.\vec{z} + (c - b + \frac{l}{2}).\vec{z} + a.\vec{x}$

(Seuls les termes diagonaux sont à calculer puisque la matrice finale est diagonale).

$$\overline{\overline{I_{G_t}(2)}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(b)} \quad \overline{\overline{I_{G_t}(3)}} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(b)}$$

$$A_2 = A_{23} + m.(c - b + \frac{l}{2} - z_t)^2 = A_3$$

$$B_2 = A_{23} + m.(c - b + \frac{l}{2} - z_t)^2 + m.a^2 = B_3$$

$$C_2 = C_{23} + m.a^2 = C_3$$

On assemble la mes matrices exprimées dans la même base et au même point :

$$\overline{\overline{I_{O_1}(1+2+3)}} = \begin{pmatrix} A + 2.A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B + 2.B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C + 2.C_2 \end{pmatrix}_{(b)}$$

Inertie d'un vilebrequin

Le vilebrequin possède 1 plan de symétrie (plan $(G_1, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$) → L'axe $(G_1, \vec{y}_1)$ est axe principal d'inertie → D = F = 0 → $\overline{\overline{I_{O_1}(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{(b1)}$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_i, \vec{z})$ du cylindre i de masse m_i s'écrit :

$$I_{G_iz/Cyl_i} = C_i = \frac{m_i \cdot R_i^2}{2}$$

On exprime le moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_1, \vec{z})$ du cylindre i de masse m_i qui a pour centre de gravité $G_i(a_i, b_i, c_i)$. *Avec ici* $b_i = 0$

$$I_{G_1z/Cyl_i} = I_{G_iz/Cyl_i} + m_i \cdot (a_i^2 + b_i^2) = C_i + m_i \cdot a_i^2$$

Résultat analogue pour l'axe $(G_i, \vec{x})$ $I_{G_iy} = B_i = \frac{m_i \cdot R_i^2}{4} + \frac{m_i \cdot h_i^2}{12}$

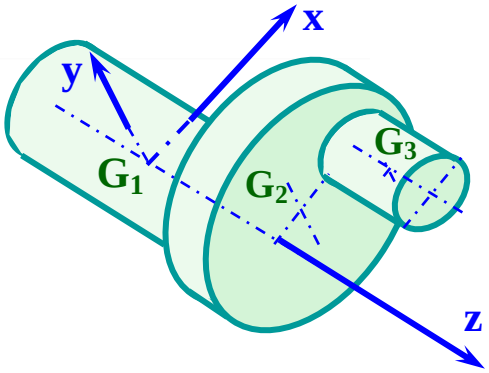
$$I_{G_1y/Cyl_i} = I_{G_iy/Cyl_i} + m_i \cdot (c_i^2 + a_i^2) = B_i + m_i \cdot (c_i^2 + a_i^2)$$

On fait la somme des moments d'inertie par rapport aux trois axes du repère pour les trois cylindres $(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$I_{G_1x/S} = \sum_{i=1}^{3} \left[A_i + m_i \cdot (b_i^2 + c_i^2) \right] = \sum_{i=1}^{3} \left[A_i + m_i \cdot c_i^2 \right]$$

$$I_{G_1y/S} = \sum_{i=1}^{3} \left[B_i + m_i \cdot (c_i^2 + a_i^2) \right]$$

$$I_{G_1z/S} = \sum_{i=1}^{3} \left[C_i + m_i \cdot (a_i^2 + b_i^2) \right] = \sum_{i=1}^{3} \left[C_i + m_i \cdot a_i^2 \right]$$



Recherche des produits d'inertie pour le cylindre i :

On les calcule d'abord dans le repère centré en G_i

$$I_{yz/Cyl_i \text{ en } G_i} = D_i = 0 \quad \text{de même} \quad E_i = F_i = 0$$

Puis on les calcule dans le repère centré en G_1

$$I_{yz/Cyl_i \text{ en } G_1} = \cancel{D_i} + m_i \cdot \cancel{b_i} \cdot c_i = 0$$

$$I_{zx/Cyl_i \text{ en } G_1} = \cancel{E_i} + m_i \cdot c_i \cdot a_i = m_i \cdot c_i \cdot a_i$$

$$I_{xy/Cyl_i \text{ en } G_1} = \cancel{F_i} + m_i \cdot a_i \cdot \cancel{b_i} = 0$$

Enfin on somme pour chaque produit les produits des trois cylindres

$$I_{yz/S\,en\,G_1} = \sum_{i=1}^{3}\left[I_{yz/Cyl_i\,en\,G_1}\right] =$$

$$I_{xy/S\,en\,G_1} = \sum_{i=1}^{3}\left[I_{xy/Cyl_i\,en\,G_1}\right] =$$

$$I_{zx/S\,en\,G_1} = \sum_{i=1}^{3}\left[I_{zx/Cyl_i\,en\,G_1}\right] = \sum_{i=1}^{3}\left[m_i \cdot c_i \cdot a_i\right]$$

!!! Bien penser au signe moins devant les produits

$$\mathbb{I}(G_1,S) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3}\left[A_i + m_i \cdot c_i^{\,2}\right] & 0 & -\sum_{i=1}^{3}\left[m_i \cdot c_i \cdot a_i\right] \\ 0 & \sum_{i=1}^{3}\left[B_i + m_i \cdot (c_i^{\,2} + a_i^{\,2})\right] & 0 \\ -\sum_{i=1}^{3}\left[m_i \cdot c_i \cdot a_i\right] & 0 & \sum_{i=1}^{3}\left[C_i + m_i \cdot a_i^{\,2}\right] \end{pmatrix}_{B_0}$$

Rotor d'hélicoptère

Q1. La matrice d'inertie de la plaque P1 de centre de gravité G_1 est :

$$\overline{\overline{I_{G_1}(P_1)}} = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}.\left(a^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}.\left(4L^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}.\left(a^2+4L^2\right) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}$$

Théorème d'Huygens :

$$\overline{\overline{I_A(P_1)}} = \overline{\overline{I_{G_1}(P_1)}} + \overline{\overline{I_A(m \to G_1)}} \text{ avec } \overline{\overline{I_A(m \to G_1)}} = m.\begin{bmatrix} \left(\frac{a}{2}\right)^2 & -\left(\frac{a}{2}\right).L & 0 \\ -\left(\frac{a}{2}\right).L & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^2 + L^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}$$

$$\text{Donc } \overline{\overline{I_A(P_1)}} = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}.\left(a^2\right) + m.\left(\frac{a}{2}\right)^2 & -m.\left(\frac{a}{2}\right).L & 0 \\ -m.\left(\frac{a}{2}\right).L & \frac{m}{12}.\left(4L^2\right) + m.L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}.\left(a^2+4L^2\right) + m.\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + L^2\right] \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}$$

$$\boxed{\overline{\overline{I_A(P_1)}} = \begin{pmatrix} \frac{m}{3}.\left(a^2\right) & -m.\left(\frac{a}{2}\right).L & 0 \\ -m.\left(\frac{a}{2}\right).L & \frac{m}{3}.\left(4L^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}.\left(a^2+4L^2\right) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}}$$

Q2. On notera H le rotor constitué des quatre pales identiques. Les pales sont supposées homogènes. L'axe $(A, \vec{z})$ est axe de symétrie matérielle pour l'hélice ; à tout point M du rotor tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$, on peut faire correspondre la point M' du rotor tel que $\overrightarrow{AM'} = -x\vec{x} - y\vec{y} + z\vec{z}$. Cette symétrie impose

$$D = \int_H yzdm = 0 \quad E = \int_H zxdm = 0$$

On peut passer de P_1 à P_2 par une rotation d'axe $(A, \vec{z})$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$; à tout point $M_1(x, y, z)$ de P_1 correspond un point $M_2(-y, x, z)$ de P_2 par cette rotation. On aura donc

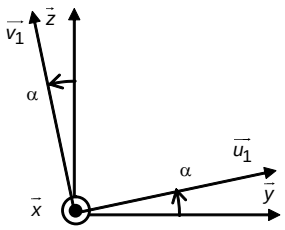
$$\int_{P_1} xydm = -\int_{P_2} xydm$$

Et de façon identique

$$\int_{P_3} xydm = -\int_{P_4} xydm$$

On a donc $F = 0$.

Ainsi, il n'est pas nécessaire de déterminer les produits d'inertie d'une pale dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, car la somme des produits d'inertie pour les 4 pales (hélice) est nulle.



$$I_{Ay}(P_1)=\vec{y}.\overline{\overline{I_A(P_1)}}.\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\ \cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}\cdot\begin{pmatrix}\frac{m}{3}.\left(a^2\right) & -m\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot L & 0\\ -m\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot L & \frac{m}{3}.\left(4L^2\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{3}.\left(a^2+4L^2\right)\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}$$

$$I_{Ay}(P_1)=\vec{y}.\overline{\overline{I_A(P_1)}}.\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\ \cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}\cdot\begin{pmatrix}-m\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot L\cdot\cos\alpha\\ \frac{m}{3}.\left(4L^2\right)\cdot\cos\alpha\\ -\frac{m}{3}.\left(a^2+4L^2\right)\cdot\sin\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}=\frac{m}{3}.\left(4L^2\right)\cdot\cos^2\alpha+\frac{m}{3}.\left(a^2+4L^2\right)\cdot\sin^2\alpha$$

$$\boxed{I_{Ay}(P_1)=\frac{m}{3}.\left(4L^2+a^2\sin^2\alpha\right)}$$

De même

$$I_{Az}(P_1)=\vec{z}.\overline{\overline{I_A(P_1)}}.\vec{z}=\begin{pmatrix}0\\ \sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}\cdot\begin{pmatrix}-m\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot L\cdot\sin\alpha\\ \frac{m}{3}.\left(4L^2\right)\cdot\sin\alpha\\ \frac{m}{3}.\left(a^2+4L^2\right)\cdot\cos\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u_1},\vec{v_1})}=\frac{m}{3}.\left(4L^2\right)\cdot\sin^2\alpha+\frac{m}{3}.\left(a^2+4L^2\right)\cdot\cos^2\alpha$$

$$\boxed{I_{Az}(P_1)=\frac{m}{3}.\left(4L^2+a^2\cos^2\alpha\right)}$$

Donc $\overline{\overline{I_A(P_1)}}=\begin{pmatrix}\frac{m}{3}.\left(a^2\right) & ? & ?\\ ? & \frac{m}{3}.\left(4L^2+a^2\sin^2\alpha\right) & ?\\ ? & ? & \frac{m}{3}.\left(4L^2+a^2\cos^2\alpha\right)\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Q3. Donc $\boxed{\overline{\overline{I_A(H)}}=\begin{pmatrix}\frac{2\cdot m}{3}.\left(a^2\cdot(1+\sin^2\alpha)+4L^2\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{2\cdot m}{3}.\left(a^2\cdot(1+\sin^2\alpha)+4L^2\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{4m}{3}.\left(4L^2+a^2\cos^2\alpha\right)\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$