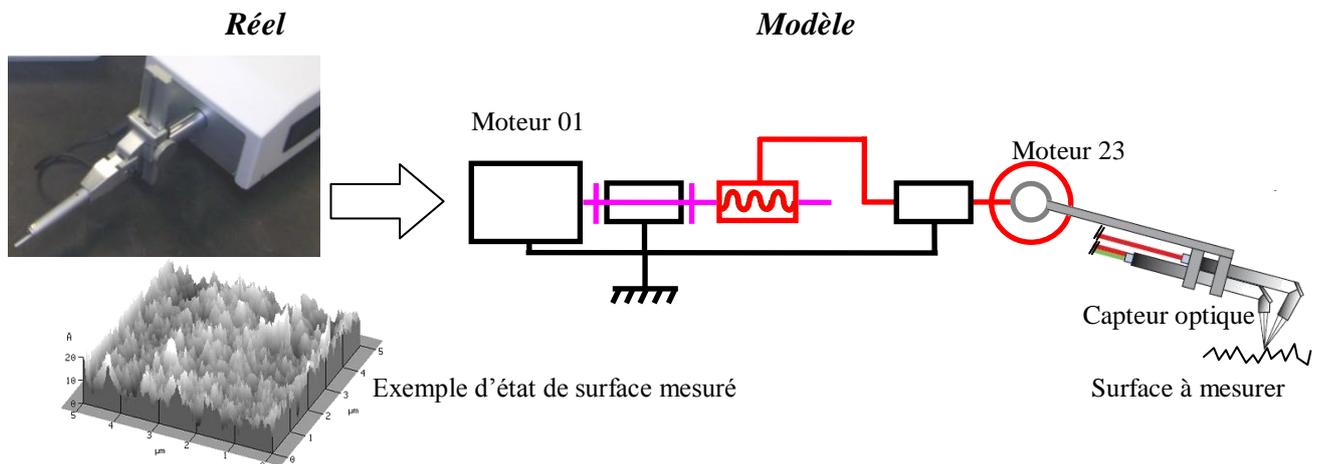


Théorème de l'énergie cinétique

Sommaire

Théorème de l'énergie cinétique	1
1 Théorème de l'énergie cinétique – Énoncés	2
1.1 Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un solide	2
1.2 Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un système de solides	2
1.3 Remarques pratiques concernant la mise en œuvre du TEC	2
2 Énergie cinétique	3
2.1 Énergie cinétique d'un solide	3
2.2 Énergie cinétique d'un système de solides	3
2.3 Démarche de calcul pour déterminer l'énergie cinétique d'un solide	4
2.4 Inertie équivalente - masse équivalente	6
3 Puissances	7
3.1 Puissance galiléenne d'une action mécanique extérieure sur un solide	7
3.2 Puissance des actions mécaniques intérieures - Rendement	8

Exemple de système : Rugosimètre



La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. L'ordre de grandeur des défauts mesurés est le micron. Cette mesure des états de surfaces est aussi répandue et indispensable que la mesure des caractéristiques dimensionnelles et géométriques des pièces mécaniques. La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal (algorithmes informatiques), qui permet de traduire les mesures physiques de base, produites par le capteur, en données numériques exploitables, représentatives des caractéristiques physiques de la surface analysée.

1 Théorème de l'énergie cinétique - Énoncés

1.1 Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un solide

Il existe un repère galiléen R_g tel que pour un solide (S) : $P_{ext \rightarrow S/R_g} = \frac{dEC_{S/R_g}}{dt}$

Puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures appliquées sur le solide S

Variation par rapport au temps de l'énergie cinétique du solide S par rapport au repère galiléen

1.2 Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un système de solides

Il existe un repère galiléen R_g tel que pour un système (Σ) : $P_{ext \rightarrow \Sigma/R_g} + P_{int} = \frac{dEC_{\Sigma/R_g}}{dt}$

Puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures appliquées sur le système de solides Σ

Puissance des actions mécaniques intérieures au système de solides Σ

Variation par rapport au temps de l'énergie cinétique du système de solides Σ par rapport au repère galiléen

1.3 Remarques pratiques concernant la mise en œuvre du TEC



Lorsque l'on souhaite obtenir une seule équation scalaire couplant les efforts extérieurs et les paramètres cinétiques, ou une seule équation de mouvement (uniquement pour les problèmes à une seule mobilité utile), le TEC est plus rapide que le PFD.

En effet, avec le PFD, il faut souvent isoler plusieurs solides et combiner les équations retenues pour n'en obtenir qu'une au final.



L'équation scalaire obtenue par le TEC est une relation unique, combinaison des équations fournies par le PFD. **Ce n'est pas une relation scalaire supplémentaire par rapport au PFD.**



Dans le cas où il y a plusieurs mobilités utiles, il est possible de combiner le TEC et le PFD. On utilise donc l'équation issue du TEC et une ou plusieurs équations issues du PFD.



Le théorème est difficile à mettre en œuvre si les puissances intérieures ne sont pas nulles.

Pour utiliser le TEC, on constate donc qu'il est nécessaire :

- de déterminer l'énergie cinétique d'un solide et/ou d'un ensemble de solides ;
- de déterminer les puissances développées par les actions mécaniques appliquées sur le solide ou le système de solides.

2 Énergie cinétique

2.1 Énergie cinétique d'un solide

Par définition, l'énergie cinétique d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R_g

s'exprime : $Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2} \cdot \int_S \|\overrightarrow{V_{P,S/Rg}}\|^2 \cdot dm$

On démontre que l'énergie cinétique est le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2} \cdot \{C_{S/Rg}\} \otimes \{C_{S/Rg}\}$$

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{V_{A,S/Rg}} \cdot \overrightarrow{R_{C,S/Rg}} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/Rg}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A,S/Rg}}$$

(l'énergie cinétique est indépendante du point choisi sur les torseurs)



Cas particuliers fréquemment rencontrés :

- Si O est un point fixe dans le mouvement de S/Rg : $Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/Rg}} \cdot \overline{I_O(S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/Rg}}$

- Si G centre de gravité de S :

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \|\overrightarrow{V_{G,S/Rg}}\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/Rg}} \cdot \overline{I_G(S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/Rg}}$$

- Si S est un point matériel :

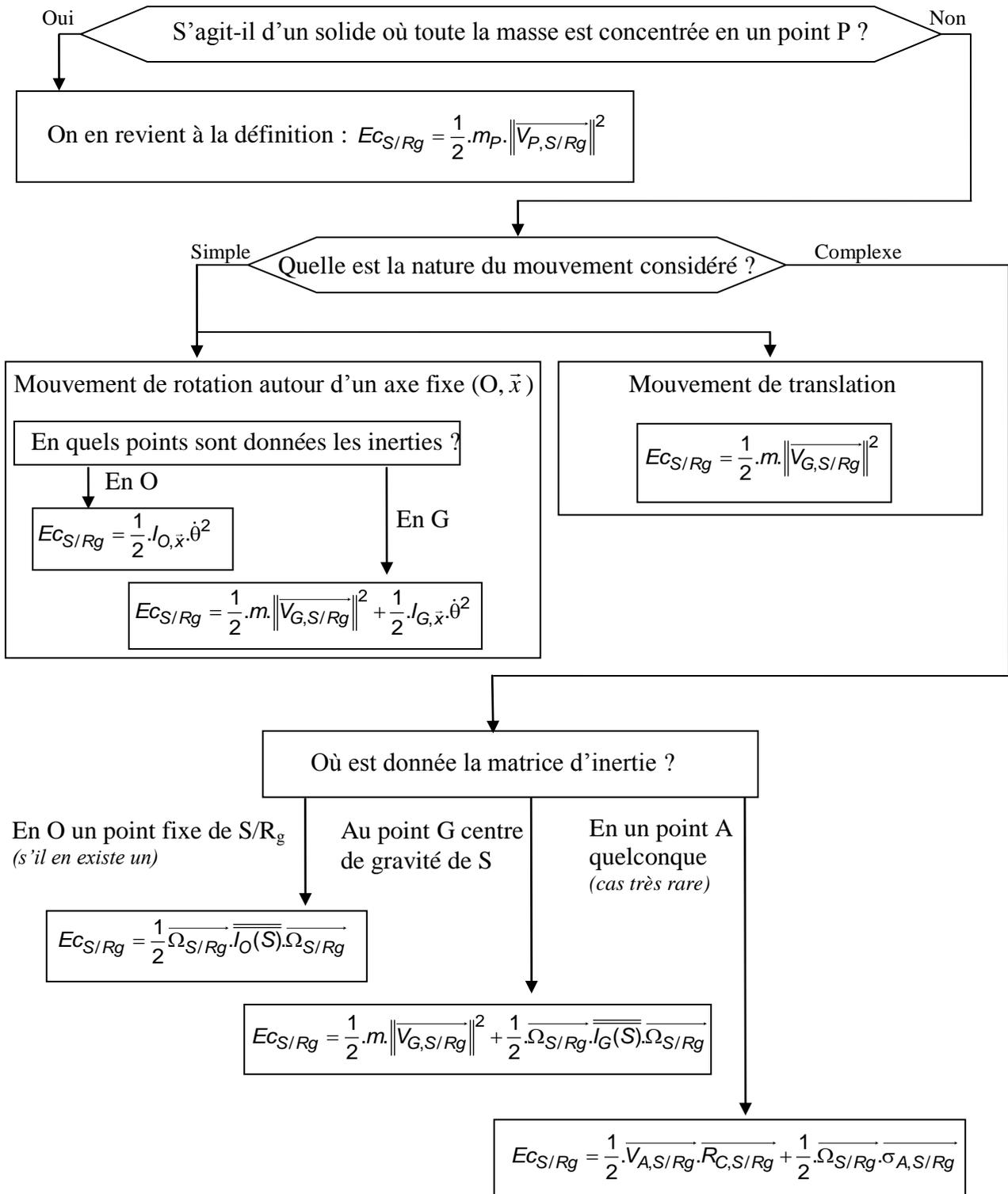
$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \|\overrightarrow{V_{G,S/Rg}}\|^2$$

2.2 Énergie cinétique d'un système de solides

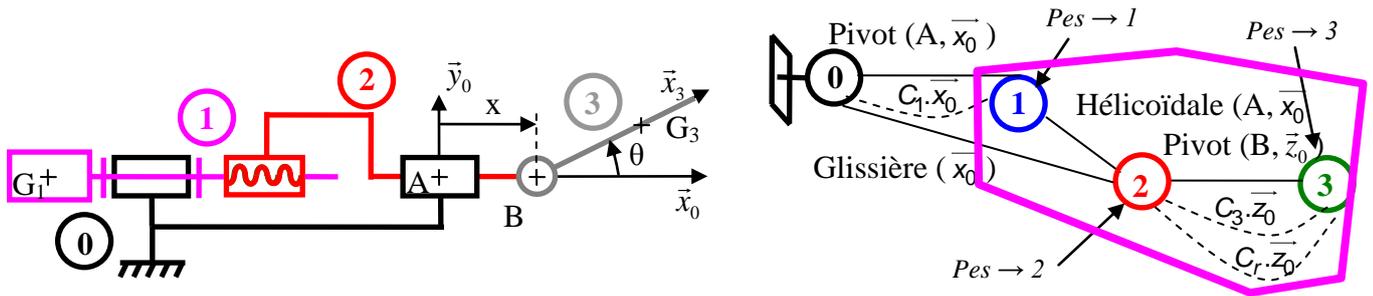
L'énergie cinétique d'un système de solides Σ par rapport à un référentiel galiléen R_g est la somme des énergies cinétiques par rapport à un référentiel galiléen R_g des S_i solides :

$$Ec_{\Sigma/Rg} = \sum_i Ec_{S_i/Rg}$$

2.3 Démarche de calcul pour déterminer l'énergie cinétique d'un solide



Application au rugosimètre – Objectif : Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$



Le rotor 1, de centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = -a.\vec{x}_0$, a pour moment d'inertie J_1 selon l'axe (A, \vec{x}_0) . On note φ le paramètre angulaire de la liaison pivot de 1/0 tel que $\varphi = (\vec{y}_0; \vec{y}_1)$. Le moteur 01 génère le mouvement de rotation de 1/0. Le couple moteur appliqué sur 1 est noté $\overrightarrow{C^m_{0 \rightarrow 1}} = C_1.\vec{x}_0$.

Le coulisseau 2, de centre de gravité G_2 , a pour masse m_2 . La liaison glissière de 2/0 a pour paramètre de position x tel que $\overrightarrow{AB} = x.\vec{x}_0$.

La liaison hélicoïdale de 1/2 possède un pas à droite tel que pas=0,5 mm/tr.

L'ensemble 3, de centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{BG_3} = r.\vec{x}_3$, a pour masse m_3 . On donne la matrice

d'inertie de cet ensemble :
$$\overline{\overline{I_{G_3}(3)}}_{G_3} = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{(b_3)}$$

On note θ le paramètre angulaire de la liaison pivot de 3/2 tel que $\theta = (\vec{x}_0; \vec{x}_3)$. Le moteur 23 génère le mouvement de rotation de 3/2. Le couple moteur appliqué sur 3 est noté $\overrightarrow{C^m_{2 \rightarrow 3}} = C_3.\vec{z}_0$.

Un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ($\theta = 0^\circ$) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur 23 n'est pas alimenté. Ce système exerce sur l'ensemble 3 un couple de rappel noté $\overrightarrow{C^r_{2 \rightarrow 3}} = C_r.\vec{z}_0$.

On considère que toutes les liaisons sont parfaites. L'action mécanique de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g.\vec{y}_0$.

Déterminons $Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} + Ec_{3/0}$

Mouvement de 1/0 : Rotation autour de l'axe (G_1, \vec{z}_0) , le moment d'inertie est donné suivant l'axe de rotation (A, \vec{x}_0) $\Rightarrow Ec_{1/0} = \frac{1}{2}.J_1.\dot{\varphi}^2$

Mouvement de 2/0 : Translation de direction \vec{x}_0 $\Rightarrow Ec_{2/0} = \frac{1}{2}.m_2.\|\overrightarrow{V_{G_2,2/0}}\|^2 = \frac{1}{2}.m_2.\dot{x}^2$

Mouvement de 3/0 : Quelconque, la matrice d'inertie est donnée en G_3

$$Ec_{3/0} = \frac{1}{2}.m_3.\|\overrightarrow{V_{G_3,3/0}}\|^2 + \frac{1}{2}.\overline{\Omega_{3/0}.I_{G_3}(3).\Omega_{3/0}}$$

avec : $\overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \dot{x}.\vec{x}_0 + r.\dot{\theta}.\vec{y}_3 = \dot{x}.\vec{x}_0 + r.\dot{\theta}(\cos\theta.\vec{y}_0 - \sin\theta.\vec{x}_0) \Rightarrow \|\overrightarrow{V_{G_3,3/0}}\|^2 = \dot{x}^2 + r^2.\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}.r.\dot{\theta}.\sin\theta$

$$\overline{\Omega_{3/0}.I_{G_3}(3).\Omega_{3/0}} = C_3.\dot{\theta}^2$$

Donc $Ec_{3/0} = \frac{1}{2}.m_3.(\dot{x}^2 + r^2.\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}.r.\dot{\theta}.\sin\theta) + \frac{1}{2}.C_3.\dot{\theta}^2$

D'où : $Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} + Ec_{3/0} = \frac{1}{2}.J_1.\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}.m_2.\dot{x}^2 + \frac{1}{2}.m_3.(\dot{x}^2 + r^2.\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}.r.\dot{\theta}.\sin\theta) + \frac{1}{2}.C_3.\dot{\theta}^2$

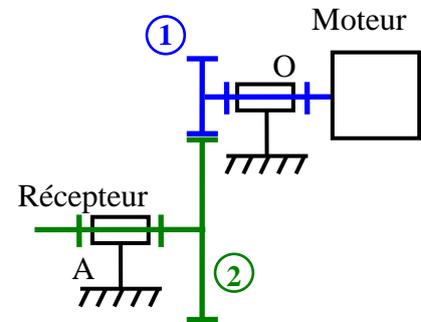
2.4 Inertie équivalente - masse équivalente

Lorsqu'on détermine littéralement l'énergie cinétique d'un ensemble de solides qui appartiennent à une même chaîne cinématique, on peut parfois l'exprimer en fonction d'un seul paramètre cinématique élevé au carré, on fait alors apparaître un terme en facteur de ce paramètre élevé au carré.

Cas de l'inertie équivalente : Exemple de transmission avec réducteur de vitesse.

Soit 1 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre moteur (en général rotor moteur, accouplement, pignon menant...); on note ω_1 la vitesse de rotation de l'ensemble 1/0 et J_1 son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

Soit 2 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre récepteur (en général élément récepteur, pignon mené ...); on note ω_2 la vitesse de rotation de l'ensemble 2/0 et J_2 son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.



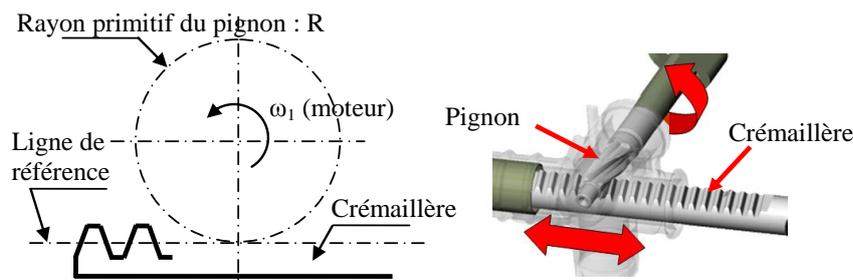
Soit $k = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ le rapport de transmission (<1 pour un réducteur de vitesse).

On a : $Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (J_1 + J_2 \cdot k^2) \cdot \omega_1^2 \rightarrow$ Le terme $J_1 + J_2 \cdot k^2$ est appelé « **inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur** », de cette chaîne cinématique.

Remarque : Si on exprimait l'énergie cinétique en fonction de ω_2 , on trouverait « **l'inertie équivalente ramenée à l'arbre récepteur** » : $\frac{1}{k^2} \cdot J_1 + J_2$

Cas de la masse équivalente : Exemple d'un système pignon-crémaillère

Si le paramètre cinématique en fonction duquel l'énergie cinétique est exprimée, est la vitesse d'un solide qui est en translation, alors on parle de « **masse équivalente** ».



Soit 1 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre moteur, on note ω_1 la vitesse de rotation de l'ensemble 1/0 et J_1 son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

Soit 2 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées à la crémaillère de masse totale M_2 .

Expression de la vitesse de la crémaillère : $V_2 = R \cdot \omega_1$

D'où : $Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot V_2^2 \rightarrow Ec_{\Sigma/0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{J_1}{R^2} + M_2 \right) V_2^2$

Le terme $\frac{J_1}{R^2} + M_2$ est appelé « **masse équivalente ramenée au récepteur** » de cette chaîne cinématique.

3 Puissances

3.1 Puissance galiléenne d'une action mécanique extérieure sur un solide

La puissance galiléenne d'une action mécanique extérieure sur un solide S par rapport à un repère galiléen R_g est le comoment entre le torseur d'action mécanique de cette action mécanique et le torseur cinématique :

$$\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} = \{F_{ext \rightarrow S}\} \otimes \{C_{S/Rg}\}$$

$$\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} = \overrightarrow{R_{ext \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{V_{A,S/Rg}} + \overrightarrow{M_{A,ext \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/Rg}}$$



Cas particuliers fréquemment rencontrés :

- Cas d'une force extérieure appliquée en un point A : $\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} = \overrightarrow{F_{ext \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{V_{A,S/Rg}}$
- Cas d'un couple extérieur appliquée en un point A : $\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} = \overrightarrow{C_{A,ext \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/Rg}}$



La puissance extérieure est une puissance scalaire, elle dépend du repère de référence R_g .



Dans le cas où le bâti est fixe par rapport à R_g et si les liaisons avec le bâti sont parfaites, la puissance développée par les actions mécaniques de liaison du bâti sur le système isolé est nulle.



Si $\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} > 0$, l'action mécanique est motrice. Si $\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} < 0$, l'action mécanique est réceptrice.

Application au rugosimètre

Objectif : Calculer les puissances extérieures de l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$

Si on isole l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$, on retrouve deux éléments extérieurs développant une puissance non nulle : $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1/0}^m$ et $\mathcal{P}_{pes \rightarrow 3/0}$.

$$\mathcal{P}_{pes \rightarrow 1/0} = \overrightarrow{R_{pes \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{V_{G_1,1/0}} = 0 \quad \text{car } \overrightarrow{V_{G_1,1/0}} = \vec{0}$$

$$\mathcal{P}_{pes \rightarrow 2/0} = \overrightarrow{R_{pes \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = 0 \quad \text{car } \overrightarrow{R_{pes \rightarrow 2}} \perp \overrightarrow{V_{G_2,2/0}}$$

$$\mathcal{P}_{pes \rightarrow 3/0} = \overrightarrow{R_{pes \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = -m_3 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \cdot (\dot{x} \cdot \vec{x}_0 + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_3) = -m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$$

$$\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1/0} = \{F_{0 \rightarrow 1}\} \otimes \{C_{1/0}\} = 0 \quad \text{car liaison parfaite et bâti fixe.}$$

$$\mathcal{P}_{0 \rightarrow 2/0} = \{F_{0 \rightarrow 2}\} \otimes \{C_{2/0}\} = 0 \quad \text{car liaison parfaite et bâti fixe.}$$

$$\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1/0}^m = \overrightarrow{C_{A,0 \rightarrow 1}^m} \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = C_1 \cdot \vec{x}_0 \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{x}_0 = C_1 \cdot \dot{\phi}$$

3.2 Puissance des actions mécaniques intérieures - Rendement

La puissance des actions mécaniques intérieures entre un solide S_i et un solide S_j est le comoment entre le torseur d'action mécanique de S_i sur S_j et le torseur cinématique de S_j par rapport à S_i :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{S_i \leftrightarrow S_j} = \mathcal{P}_{S_i \rightarrow S_j / R_g} + \mathcal{P}_{S_j \rightarrow S_i / R_g} = \{F_{S_i \rightarrow S_j}\} \otimes \{C_{S_j / S_i}\} = \{F_{S_j \rightarrow S_i}\} \otimes \{C_{S_i / S_j}\}$$

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}} \cdot \overrightarrow{V_{A, S_j / S_i}} + \overrightarrow{M_{A, S_i \rightarrow S_j}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_j / S_i}}$$



Attention aux indices, ils sont permutés : $S_i \rightarrow S_j$ et S_j / S_i !



La puissance des actions mécaniques intérieures ne dépend pas du repère de référence R_g .

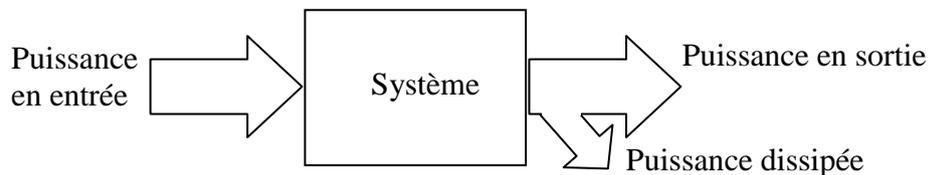


Dans le cas d'une liaison parfaite $\mathcal{P}_{S_i \leftrightarrow S_j} = 0$.



La puissance des actions mécaniques intérieures est une puissance dissipée $\mathcal{P}_{S_i \leftrightarrow S_j} < 0$.

Dans certains problèmes, la puissance perdue dans un mécanisme est donnée par le rendement η de ce mécanisme.



La puissance \mathcal{P}_e est une quantité positive, les puissances \mathcal{P}_S et \mathcal{P}_d sont des quantités négatives.

On a $\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_d + \mathcal{P}_S = 0$ et $\eta = \frac{|\mathcal{P}_S|}{\mathcal{P}_e} \rightarrow \mathcal{P}_d = \mathcal{P}_e \cdot (\eta - 1)$.

Application au rugosimètre

Objectif : Calculer les puissances intérieures de l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$

Si on isole l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$, on retrouve deux éléments intérieurs développant une puissance non nulle : $\mathcal{P}_{2 \leftrightarrow 3}^m$ et $\mathcal{P}_{2 \leftrightarrow 3}^r$.

$\mathcal{P}_{1 \leftrightarrow 2} = \mathcal{P}_{2 \leftrightarrow 3} = 0$ car liaisons parfaites

$$\mathcal{P}_{2 \leftrightarrow 3}^m = \{F_{2 \rightarrow 3}^m\} \otimes \{C_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{3 \cdot \vec{z}_0} \end{Bmatrix}_B \otimes \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = C_3 \cdot \dot{\theta}$$

$$\mathcal{P}_{2 \leftrightarrow 3}^r = \{F_{2 \rightarrow 3}^r\} \otimes \{C_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{r \cdot \vec{z}_0} \end{Bmatrix}_B \otimes \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = C_r \cdot \dot{\theta}$$