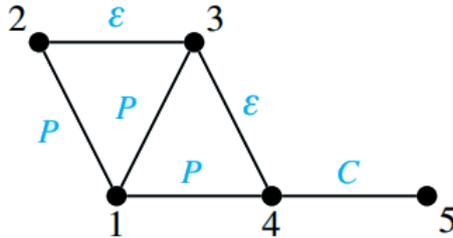


**Motorisation d'un treuil**

1. Ce mécanisme comporte 5 solides et 6 liaisons et on trace le graphe des liaisons.



$P$	Pivot
$\varepsilon$	Engrenage
$C$	Câble

On reconnaît dans ce graphe deux chaînes fermées de type « pivot – pivot – engrenage », pour lesquelles on sait trouver une relation entre les vitesses de rotation au niveau des liaisons de type pivot.

$$\frac{\omega_{41}}{\omega_{31}} = -\frac{Z_{34}}{Z_4} \quad \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{Z_2}{Z_{32}}$$

On en déduit l'expression du rapport de transmission

$$\frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{Z_{34}Z_2}{Z_{32}Z_4}$$

Pour la chaîne ouverte 4 – 5, on fait l'hypothèse que le mouvement de la charge suspendue par rapport au bâti est une translation suivant  $\vec{y}_1$ . On admet alors la relation élémentaire

$$v_{51} = +R\omega_{41}$$

On obtient en définitive comme loi entrée-sortie

$$v_{51} = +R \frac{Z_{34}Z_2}{Z_{32}Z_4} \omega_{21}$$

2. On décrit le système  $\Sigma$  comme un ensemble de solides indéformables et l'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques évaluées pour chacun des solides

$$E(\Sigma/1) = \sum_{i=2}^5 E(i/1)$$

Il y a quatre termes à calculer, pour lesquels on exploite les relations cinématiques précédentes :

- l'arbre moteur 2 est en rotation autour d'un axe immobile dans le repère 1 ;

$$E(2/1) = \frac{1}{2} J_2 \omega_{21}^2$$

- l'arbre intermédiaire 3 est en rotation autour d'un axe immobile dans le repère 1 ;

$$E(3/1) = \frac{1}{2} J_3 \omega_{31}^2 = \frac{1}{2} J_3 \left( \frac{Z_2}{Z_{32}} \right)^2 \omega_{21}^2$$

- le tambour 4 est en rotation autour d'un axe immobile dans le repère 1 ;

$$E(4/1) = \frac{1}{2} J_4 \omega_{41}^2 = \frac{1}{2} J_4 \left( \frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4} \right)^2 \omega_{21}^2$$

- la charge 5 est en mouvement de translation par rapport au bâti 1.

$$E(5/1) = \frac{1}{2} M v_{51}^2 = \frac{1}{2} M R^2 \left( \frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4} \right)^2 \omega_{21}^2$$

On en déduit l'expression générale de l'énergie cinétique

$$E(\Sigma/1) =$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\left( J_2 + J_3 \left( \frac{Z_2}{Z_{32}} \right)^2 + J_4 \left( \frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4} \right)^2 + M R^2 \left( \frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4} \right)^2 \right)}_{J_{eq}} \omega_{21}^2$$

Cette expression montre l'intérêt de poser immédiatement  $J_{eq}$  le moment d'inertie équivalent à l'ensemble des pièces mobiles, ramené à l'arbre moteur. Ce moment ne dépend que de paramètres d'inertie et géométriques. L'énergie cinétique s'exprime alors simplement

$$E(\Sigma/1) = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_{21}^2$$

3. Le bâti 1 est assimilé à un repère galiléen et on exprime le théorème de l'énergie cinétique appliqué au mouvement  $\Sigma/1$

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/1) = \sum_i P g(\bar{\Sigma} \rightarrow i) + \sum_{k>i} P(k \leftrightarrow i)$$

On dénombre tout d'abord les termes concernant la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$  :

- les trois liaisons de type pivot avec le bâti, supposées sans frottement ;

$$P g(1 \rightarrow 2) = 0$$

$$P g(1 \rightarrow 3) = 0$$

$$P g(1 \rightarrow 4) = 0$$

- la pesanteur sur chacun des quatre solides :
  - les centres de masse  $G_2$ ,  $G_3$  et  $G_4$  sont respectivement sur les axes de rotation des mouvements 2/1, 3/1 et 4/1 ;

$$P g(p \rightarrow 2) = 0$$

$$P g(p \rightarrow 3) = 0$$

$$P g(p \rightarrow 4) = 0$$

- la charge 5 est en mouvement de translation rectiligne suivant  $\vec{y}_1$ .

$$P g(p \rightarrow 5) = -Mg v_{51}$$

- le couple moteur exercé par le stator sur le rotor.

$$P g(m \rightarrow 2) = C_m \omega_{21}$$

On dénombre ensuite les termes concernant la puissance des interefforts :

- les transmissions par engrenage sont supposées sans frottement ;

$$P(2 \leftrightarrow 3) = 0$$

$$P(3 \leftrightarrow 4) = 0$$

- la transmission par câble est supposée ne pas dissiper d'énergie.

$$P(4 \leftrightarrow 5) = 0$$

On somme tous ces termes en mettant  $\omega_{21}$  en facteur et on dérive l'énergie cinétique pour arriver à l'expression

$$J_{eq} \dot{\omega}_{21} \omega_{21} = \left( C_m - MgR \frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4} \right) \omega_{21}$$

La simplification du terme  $\omega_{21}$  est possible et l'expression finale du couple moteur est :

$$C_m = \underbrace{MgR \frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4}}_{(a)} + \underbrace{J_{eq} \dot{\omega}_{21}}_{(b)}$$

4. Le couple moteur est la somme de deux composantes :

- le terme (a) représente le couple moteur nécessaire pour le maintien de l'équilibre ;
- le terme (b) représente le couple supplémentaire à fournir pour accélérer le mouvement.

5. Le phénomène de frottement est pris en compte au niveau de la liaison entre le tambour 4 et le bâti 1 :

- le calcul de l'énergie cinétique n'est pas modifié ;
- pour le calcul de la puissance, seul le terme  $Pg(1 \rightarrow 4)$  est à reprendre.

Comme on n'est plus dans un cas élémentaire, il est utile de détailler le calcul à faire à partir de l'expression générale de la puissance galiléenne de l'action mécanique  $1 \rightarrow 4$

$$Pg(1 \rightarrow 4) = \mathcal{F}(1 \rightarrow 4) \otimes \mathcal{V}(4/1)$$

On s'intéresse aux torseurs :

- le torseur cinématique est inchangé ;

$$\mathcal{V}(4/1) = G_4 \begin{cases} \omega_{41} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison évolue. Il comporte maintenant six composantes non nulles et on caractérise celle qui est due au frottement

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 4) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 4) \\ \vec{M}(G_4, 1 \rightarrow 4), \text{ avec } \vec{M}(G_4, 1 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_1 = -\mu \omega_{41} \end{cases}$$

L'expression à prendre en compte pour la puissance est alors

$$Pg(1 \rightarrow 4) = -\mu \omega_{41}^2$$

On en déduit la nouvelle expression issue de l'application du théorème de l'énergie cinétique

$$C_m = \underbrace{\frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4} (MgR + \mu \omega_{21})}_{(a)} + \underbrace{J_{eq} \dot{\omega}_{21}}_{(b)}$$

L'interprétation des deux termes reste inchangée.

**Retourneur**

**Q1.** La bobine est un cylindre creux, la matrice d'inertie est obtenue en « soustrayant » le cylindre intérieur du cylindre plein. On connaît la matrice d'inertie d'un cylindre plein (annexe A.1.2) ce qui permet d'écrire ici :

$$\overline{\mathcal{I}}_{G_B}(\text{Bob}) = \overline{\mathcal{I}}_{G_B}(\text{Cplet}) - \overline{\mathcal{I}}_{G_B}(\text{Cint})$$

$$= \begin{pmatrix} A_I & 0 & 0 \\ 0 & B_I & 0 \\ 0 & 0 & A_I \end{pmatrix}_{G_B} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & A_P \end{pmatrix}_{G_B} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

avec

$$A_P = M_P \left( \frac{R_e^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right), \quad B_P = \frac{1}{2} \cdot M_P \cdot R_e^2, \quad A_I = M_I \left( \frac{R_I^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right), \quad B_I = \frac{1}{2} \cdot M_I \cdot R_I^2.$$

En posant  $\rho$  pour la masse volumique de la bobine.

$$M_B = \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (R_e^2 - R_I^2)$$

$$A_B = A_P - A_I = M_P \left( \frac{R_e^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) - M_I \left( \frac{R_I^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

$$A_B = \rho \cdot \pi \cdot R_e^2 \cdot h \left( \frac{R_e^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) - \rho \cdot \pi \cdot R_I^2 \cdot h \left( \frac{R_I^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

$$A_B = \rho \cdot \pi \cdot h \frac{R_e^4 - R_I^4}{4} + \rho \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{h^2}{12} (R_e^2 - R_I^2) = \frac{M_B}{4} \frac{R_e^4 - R_I^4}{R_e^2 - R_I^2} + M_B \frac{h^2}{12}$$

$$A_B = M_B \left( \frac{R_e^2 + R_I^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \text{ de même } B_B = M_B \frac{R_e^2 + R_I^2}{2}$$

**Q2.** Moment d'inertie de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{retourneur}, \text{bobine}\}$  par rapport à  $(O, \vec{x}_0)$ .

$$I_{O, \vec{x}_0}(\Sigma) = I_{O, \vec{x}_0}(B) + I_{O, \vec{x}_0}(R)$$

$$I_{O, \vec{x}_0}(B) = I_{G_B, \vec{x}_0}(B) + M_B \cdot y_B^2 = A_B + M_B \cdot y_B^2 \text{ (théorème de Huygens)}$$

$$I_{O, \vec{x}_0}(B) = M_B \left( \frac{R_e^2 + R_I^2}{4} + \frac{h^2}{12} + y_B^2 \right)$$

$$I_{O, \vec{x}_0}(\Sigma) = M_B \left( \frac{R_e^2 + R_I^2}{4} + \frac{h^2}{12} + y_B^2 \right) + A$$

**Q3.** Inventaire des actions appliquées sur l'ensemble  $\Sigma$ .

- Le poids de la bobine  $\{\mathcal{P}_{g \rightarrow B}\} = \left\{ \begin{matrix} -M_B \cdot g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_B}$ ,

- le poids du retourneur  $\{\mathcal{P}_{g \rightarrow R}\} = \left\{ \begin{matrix} -M_R \cdot g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_R}$ ,

- le couple moteur  $\{\mathcal{C}_{m \rightarrow R}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P}$ ,

- la liaison pivot entre le bâti et le retourneur  $\{\mathcal{A}_{O \rightarrow R}\} = \left\{ \begin{matrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \right\}_{\forall P \in (O, \vec{x}_0)} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$ .

**Q4.** Ensemble  $\Sigma = \{\text{Retourneur} + \text{Bobine}\}$  est en rotation par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  fixe dans le repère galiléen  $(\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_0)$ . L'énergie cinétique galiléenne est donc :

$$E_{C\Sigma/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2} \cdot I_{O, \vec{x}_0}(\Sigma) \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left( M_B \left( \frac{R_e^2 + R_I^2}{4} + \frac{h^2}{12} + y_B^2 \right) + A \right) (\Sigma) \cdot \dot{\theta}^2.$$

Q5. Puissance des efforts extérieurs sur cet ensemble.

$$P_{(\Sigma \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_g)} = P_{(g \rightarrow B / \mathcal{R}_g)} + P_{(g \rightarrow R / \mathcal{R}_g)} + P_{(Cm \rightarrow R / \mathcal{R}_g)} + P_{(O \rightarrow R / \mathcal{R}_g)}$$

$$P_{(g \rightarrow B / \mathcal{R}_g)} = \left\{ \begin{matrix} -M_B \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_B} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \cdot \vec{x}_0 \\ y_B \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 \end{matrix} \right\}_{G_B} = -M_B \cdot y_B \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$P_{(g \rightarrow R / \mathcal{R}_g)} = \left\{ \begin{matrix} -M_R \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_R} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \cdot \vec{x}_0 \\ y_R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 \end{matrix} \right\}_{G_R} = -M_R \cdot y_R \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$P_{(Cm \rightarrow R / \mathcal{R}_g)} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_O \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = C_m \cdot \dot{\theta}$$

$$P_{(O \rightarrow R / \mathcal{R}_g)} = \left\{ \begin{matrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \right\}_{O, (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{O, (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = 0$$

$$P_{(\Sigma \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_g)} = C_m \cdot \dot{\theta} - (M_B \cdot y_B + M_R \cdot y_R) \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

Q6. Déterminer, à partir du théorème de l'énergie cinétique, l'équation différentielle du mouvement.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [E_{C\Sigma / \mathcal{R}_g}] &= P_{(\Sigma \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_g)} + P_{I_n t \Sigma} \\ I_{O, \vec{x}_0}(\Sigma) \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} &= C_m \cdot \dot{\theta} - (M_B \cdot y_B + M_R \cdot y_R) \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ \left( M_B \left( \frac{R_c^2 + R_t^2}{4} + \frac{h^2}{12} + y_B^2 \right) + A \right) \cdot \ddot{\theta} &= C_m - (M_B \cdot y_B + M_R \cdot y_R) \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

## Manège

Q1. voir la figure 4.13

Q2.

sur 1 - le poids :  $\{\mathcal{A}_{P_g \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} -m_1 \cdot \vec{z}_0^* \\ 0 \end{matrix} \right\}_O$ ,

- la liaison  $L_{10}$  :  $\{\mathcal{L}_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & 0 \end{matrix} \right\}_{B_0}$ ,

- le couple développé par les enfants

$$\{\mathcal{A}_{C_e, 2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -C_e \cdot \vec{z}_0^* \end{matrix} \right\}_{VP}$$

sur 2 - le poids :  $\{\mathcal{A}_{P_g \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} -m_2 \cdot \vec{z}_0^* \\ 0 \end{matrix} \right\}_A$ ,

- la liaison  $L_{12}$  :  $\{\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & 0 \end{matrix} \right\}_{A_{B_0}}$ ,

- le couple développé par les enfants

$$\{\mathcal{A}_{C_e, 1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ C_e \cdot \vec{z}_0^* \end{matrix} \right\}_{VP}$$

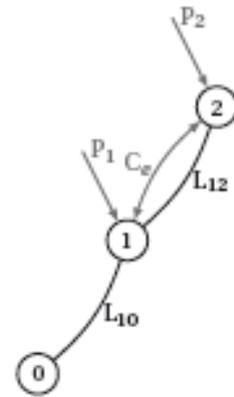


FIGURE 4.13 – Graphe de structure

Q3. Le système possède 2 mobilités, la rotation du plateau 1 par rapport à 0, et la rotation de la nacelle 2 par rapport à 1. Il faut donc écrire 2 équations indépendantes pour déterminer les équations de mouvement.

Q4.

- Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe  $(O, \vec{z}_0^*)$  appliqué à l'ensemble  $\{1,2\}$  : pas de composante pour le moment suivant  $(O, \vec{z}_0^*)$  pour la liaison  $L_{10}$  ;
- Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe  $(A, \vec{z}_0^*)$  appliqué au solide 1 : pas de composante pour le moment suivant  $(A, \vec{z}_0^*)$  pour la liaison  $L_{12}$  ;
- Théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble  $\{1,2\}$  : liaisons  $L_{10}$  et  $L_{12}$  parfaites ;
- Théorème de l'énergie cinétique appliqué au solide 1.

Q5.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O, \{1,2\}/0} &= \vec{\sigma}_{O,1/0} + \vec{\sigma}_{O,2/0} \\ \vec{\sigma}_{O,1/0} &= I_1 \cdot \omega_{10} \cdot \vec{z}_0^* \\ \vec{\sigma}_{O,2/0} &= \vec{\sigma}_{A,2/0} + \vec{OA} \wedge m_2 \cdot \vec{V}_{G_{e2}/0} \\ \vec{\sigma}_{A,2/0} &= I_2 \cdot \omega_{20} \cdot \vec{z}_0^*, \quad \vec{OA} = a \cdot \vec{x}_1^* \text{ et } \vec{V}_{G_{e2}/0} = a \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}_1^* \\ \vec{\sigma}_{O,2/0} &= I_2 \cdot \omega_{20} \cdot \vec{z}_0^* + a \cdot \vec{x}_1^* \wedge a \cdot m_2 \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}_1^* \\ \vec{\sigma}_{O,2/0} &= (I_2 \cdot \omega_{20} + a^2 \cdot m_2 \cdot \omega_{10}) \cdot \vec{z}_0^* \\ \vec{\sigma}_{O, \{1,2\}/0} &= (I_2 \cdot \omega_{20} + (a^2 \cdot m_2 + I_1) \cdot \omega_{10}) \cdot \vec{z}_0^* \end{aligned}$$

On sait que en O point fixe dans le repère galiléen on a

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{O, \{1,2\}/0} &= \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{O, \{1,2\}/0} \right]_O \\ \vec{\delta}_{O, \{1,2\}/0} \cdot \vec{z}_0^* &= \frac{d}{dt} \left[ (I_2 \cdot \omega_{20} + (a^2 \cdot m_2 + I_1) \cdot \omega_{10}) \right] \\ \vec{\delta}_{O, \{1,2\}/0} \cdot \vec{z}_0^* &= (I_2 \cdot \dot{\omega}_{20} + (a^2 \cdot m_2 + I_1) \cdot \dot{\omega}_{10}) \end{aligned}$$

Q6. Moment dynamique en projection  $(O, \vec{z}_0)$

$$\overrightarrow{\delta_{O,\{1,2\}/O}} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{M_{O,F_{ext} \rightarrow \{1,2\}}} \cdot \vec{z}_0$$

or ici

$$\overrightarrow{M_{O,F_{ext} \rightarrow \{1,2\}}} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \overrightarrow{M_{O,P_1 \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 = 0, & \overrightarrow{M_{O,P_2 \rightarrow 2}} \cdot \vec{z}_0 = 0 \\ \overrightarrow{M_{O,O \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad (\text{liaison pivot d'axe } (O, \vec{z}_0)) \end{cases}$$

Le moment dynamique est donc nul en projection suivant  $\vec{z}_0$ , on peut, en intégrant, déterminer le moment cinétique à une constante près.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_{O,\{1,2\}/O}} \cdot \vec{z}_0 &= 0 \\ \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{O,\{1,2\}/O}} \right]_O \cdot \vec{z}_0 &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \left( I_2 \cdot \omega_{20} + (a^2 \cdot m_2 + I_1) \cdot \omega_{10} \right) \right] &= 0 \\ \left( I_2 \cdot \omega_{20} + (a^2 \cdot m_2 + I_1) \cdot \omega_{10} \right) &= K \end{aligned}$$

La constante d'intégration est déterminée à l'instant initial :

$$\begin{cases} \omega_{10}(t=0) = 0 \\ \omega_{20}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow K = 0$$

$$I_2 \cdot \omega_{20} + (a^2 \cdot m_2 + I_1) \cdot \omega_{10} = 0$$

Q7. En déduire la relation donnant  $\omega_{20}$  et  $\omega_{10}$ , en fonction de  $\omega_{21}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $m_2$  et  $a$ .

$$\begin{cases} I_2 \cdot (\omega_{21} + \omega_{10}) + (a^2 \cdot m_2 + I_1) \cdot \omega_{10} = 0 \\ I_2 \cdot \omega_{20} + (a^2 \cdot m_2 + I_1) \cdot (\omega_{20} - \omega_{21}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{10} = \frac{I_2}{I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1} \cdot \omega_{21} \\ \omega_{20} = \frac{a^2 \cdot m_2 + I_1}{I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1} \cdot \omega_{21} \end{cases}$$

Q8. Appliquez le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $\{1,2\}$ , donnez la relation liant le couple  $C_e$  et  $\omega_{21}$ .

$$\frac{d}{dt} [E_{Q_{1,2}/\mathcal{R}_g}] = P_{(\{1,2\} \rightarrow \{1,2\}/\mathcal{R}_g)} + P_{int\{1,2\}}$$

Puissance des efforts intérieurs

$$\begin{aligned} P_{int\{1,2\}} &= P_{(L_{12}, 1 \rightarrow 2/1)} + P_{(C_e, 1 \rightarrow 2/1)} \\ P_{(L_{12}, 1 \rightarrow 2/1)} &= 0 \quad (\text{liaison } L_{12} \text{ parfaite}) \\ P_{(C_e, 1 \rightarrow 2/1)} &= \{ \mathcal{V}_{2/1} \} \otimes \{ \mathcal{A}_{C_e, 1 \rightarrow 2} \} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{21} \cdot \vec{z}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_e \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{VP} = C_e \cdot \omega_{21} \\ P_{int\{1,2\}} &= C_e \cdot \omega_{21} \end{aligned}$$

Puissance des efforts extérieurs

$$\begin{aligned} P_{(\overline{\{1,2\}} \rightarrow \{1,2\})/\mathcal{R}_g} &= P_{(P_1 \rightarrow 1)/\mathcal{R}_g} + P_{(P_2 \rightarrow 2)/\mathcal{R}_g} + P_{(L_{10,0} \rightarrow 1)/\mathcal{R}_g} \\ P_{(P_1 \rightarrow 1)/\mathcal{R}_g} &= 0, \quad P_{(P_2 \rightarrow 2)/\mathcal{R}_g} = 0 \quad \text{et} \quad P_{(L_{10,0} \rightarrow 1)/\mathcal{R}_g} = 0 \\ P_{(\overline{\{1,2\}} \rightarrow \{1,2\})/\mathcal{R}_g} &= 0 \end{aligned}$$

La puissance des efforts extérieurs est donc nulle.

Énergie cinétique

$$\begin{aligned} Ec_{\{1,2\}/\mathcal{R}_g} &= Ec_{1/\mathcal{R}_g} + Ec_{2/\mathcal{R}_g} \\ Ec_{1/\mathcal{R}_g} &= \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \omega_{10}^2 \quad (\text{Solide en rotation par rapport à un axe fixe dans } \mathcal{R}_g) \\ Ec_{2/\mathcal{R}_g} &= \frac{1}{2} \cdot \{ \mathcal{V}_{2/0} \} \otimes \{ \mathcal{C}_{2/0} \} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \omega_{20} \cdot \vec{z}_0 \\ a \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} m_2 \cdot a \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}_1 \\ I_2 \cdot \omega_{20} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_A \\ &= \frac{1}{2} \cdot (m_2 \cdot a^2 \cdot \omega_{10}^2 + I_2 \cdot \omega_{20}^2) \\ Ec_{\{1,2\}/\mathcal{R}_g} &= \frac{1}{2} \cdot (I_1 \cdot \omega_{10}^2 + m_2 \cdot a^2 \cdot \omega_{10}^2 + I_2 \cdot \omega_{20}^2) = \frac{1}{2} \cdot ((I_1 + m_2 \cdot a^2) \cdot \omega_{10}^2 + I_2 \cdot \omega_{20}^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( (I_1 + m_2 \cdot a^2) \cdot \left( \frac{I_2}{I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1} \cdot \omega_{21} \right)^2 + I_2 \cdot \left( \frac{a^2 \cdot m_2 + I_1}{I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1} \cdot \omega_{21} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{(I_1 + m_2 \cdot a^2) \cdot I_2^2}{(I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1)^2} + \frac{I_2 \cdot (a^2 \cdot m_2 + I_1)^2}{(I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1)^2} \right) \cdot \omega_{21}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(I_1 + m_2 \cdot a^2) \cdot I_2}{I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1} \cdot \omega_{21}^2 \end{aligned}$$

Finalement le théorème de l'énergie cinétique permet de déterminer la relation entre  $C_e$  et  $\omega_{21}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [Ec_{\{1,2\}/\mathcal{R}_g}] &= P_{(\overline{\{1,2\}} \rightarrow \{1,2\})/\mathcal{R}_g} + P_{\text{int}\{1,2\}} \\ \frac{(I_1 + m_2 \cdot a^2) \cdot I_2}{I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1} \cdot \omega_{21} \cdot \dot{\omega}_{21} &= C_e \cdot \omega_{21} \\ \frac{(I_1 + m_2 \cdot a^2) \cdot I_2}{I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1} \cdot \dot{\omega}_{21} &= C_e \end{aligned}$$

Si on suppose que pendant la phase d'accélération, le couple fourni par les enfants est constant alors, en intégrant cette relation, on obtient la loi d'évolution de la vitesse  $\omega_{21}$ .

$$\omega_{21}(t) = \frac{I_2 + a^2 \cdot m_2 + I_1}{(I_1 + m_2 \cdot a^2) \cdot I_2} \cdot C_e \cdot t$$



## Barrière de parking

### Q1a. Barrière type A

On isole, la barrière, on applique le théorème du moment dynamique en O en projection sur l'axe  $(O, \vec{x})$ .

La barrière est soumise :

- à son poids,  $\{\mathcal{S}_p\} = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot \vec{g} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$ ,
- au couple moteur,  $\{\mathcal{S}_{mot}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_A \cdot \vec{x} \end{matrix} \right\}_{vp}$

- à l'action de liaison (liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$ )  $\{\mathcal{S}_{0-1}\} = \left\{ \begin{matrix} X & O \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \right\}_O$   $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

TMD

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{O,1/0} \cdot \vec{x} &= \overrightarrow{OG} \wedge (-M \cdot \vec{g} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{x} + C_A + 0 \\ \overrightarrow{\delta}_{O,1/0} \cdot \vec{x} &= -L_A \cdot M \cdot g \cdot \cos\theta + C_A \end{aligned}$$

en O point fixe, on peut écrire

$$\overrightarrow{\delta}_{O,1/0} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{O,1/0} \right]_O \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\sigma}_{O,1/0} = \overline{\overline{\mathcal{J}}_O(1)} \cdot \overrightarrow{\Omega}_1 0$$

Matrice d'inertie en G d'une barrière (supposé filaire),

$$\overline{\overline{\mathcal{J}}_G(1)} = \begin{pmatrix} M_A \frac{L_A^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_A \frac{L_A^2}{12} \end{pmatrix}_G \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

et en O en appliquant le théorème de Huygens,

$$\overline{\overline{\mathcal{J}}_O(1)} = \overline{\overline{\mathcal{J}}_G(1)} + M_A \begin{pmatrix} \frac{L_A^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_A^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_A \frac{L_A^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_A \frac{L_A^2}{3} \end{pmatrix}_G \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

ce qui donne  $\overrightarrow{\sigma}_{O,1/0} = M_A \frac{L_A^2}{3} \cdot \dot{\theta} \vec{x}$  puis  $\overrightarrow{\delta}_{O,1/0} \cdot \vec{x} = M_A \frac{L_A^2}{3} \cdot \ddot{\theta}$

Ce qui permet d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la barrière :

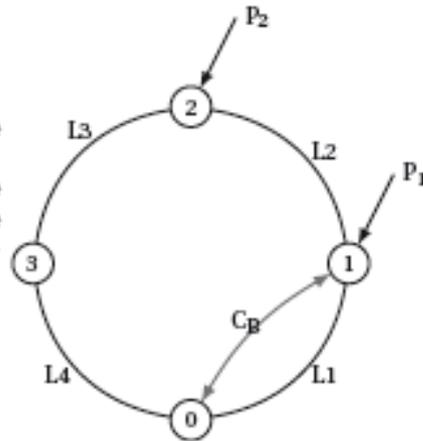
$$M_A \frac{L_A^2}{3} \cdot \ddot{\theta} = -L_A \cdot M_A \cdot g \cdot \cos\theta + C_A$$

**Q1b. Barrière type B**

Le mécanisme est constitué de 4 solides, et est mobile d'ordre  $m = 1$ .

Il est préférable dans ce cas, d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour obtenir une relation entre le couple moteur  $C_B$ , le poids ( $P_1$  et  $P_2$ ) et les paramètres du mouvement.

Nous allons isoler toutes les pièces mobiles  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ .



**Théorème de l'énergie cinétique**

$$\frac{d}{dt} (Ec_{\Sigma/0}) = P_{(\Sigma \rightarrow \Sigma/0)} + P_{int \Sigma}$$

-  $Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0}$ , masse et inertie de 3 négligeable,

-  $Ec_{1/0} = \frac{1}{2} \{ \vec{v}_{1/0} \} \otimes \{ \vec{v}_{1/0} \} = \frac{1}{2} \cdot I_O(1) \cdot \dot{\theta}^2$ , le solide (1) est en rotation par rapport à l'axe (O,  $\vec{x}$ ) et d'après

la première étude, on sait que  $I_O(1) = M_B \frac{L_B^2}{3}$ ,

-  $Ec_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot M_B L_B^2 \cdot \dot{\theta}^2$  car le solide (2) est en translation par rapport au repère associé au sol donc

$$\{ \vec{v}_{2/0} \} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{v}_{G_2 \rightarrow 2/0} \end{matrix} \right\}_{G_2} \text{ et } \{ \vec{v}_{2/0} \} = \left\{ \begin{matrix} M_B \cdot \vec{v}_{G_2 \rightarrow 2/0} \\ \vec{\sigma}_{G_2, 2/0} = \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_2} \text{ avec } \vec{v}_{G_2 \rightarrow 2/0} = \vec{v}_{A \rightarrow 2/0} = L_B \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1^*$$

-  $P_{int \Sigma} = 0$ , liaisons internes parfaites,

-  $P_{(\Sigma \rightarrow \Sigma/0)} = P_{(P_1 \rightarrow 1/0)} + P_{(P_2 \rightarrow 2/0)} + P_{(C_B \rightarrow 1/0)} + P_{(0 \rightarrow 1 \rightarrow 1/0)} + P_{(0 \rightarrow 3 \rightarrow 3/0)}$ .

$$- P_{(P_1 \rightarrow 1/0)} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \\ \vec{v}_{G_1 \rightarrow 1/0} = \frac{1}{2} \cdot L_B \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1^* \end{matrix} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} -M_B \cdot \vec{g} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1} = -\frac{1}{2} M_B \cdot L_B \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$$

$$- P_{(P_2 \rightarrow 2/0)} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0} \\ \vec{v}_{G_2 \rightarrow 2/0} = L_B \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1^* \end{matrix} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} -M_B \cdot \vec{g} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1} = -M_B \cdot L_B \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$$

-  $P_{(C_B \rightarrow 1/0)} = C_B \cdot \dot{\theta}$

-  $P_{(0 \rightarrow 1 \rightarrow 1/0)} = 0$  et  $P_{(0 \rightarrow 3 \rightarrow 3/0)} = 0$ , en effet ces deux liaisons sont parfaites.

Finalement le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \cdot M_B \frac{L_B^2}{3} \cdot \dot{\theta}^2 \right] + \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \cdot M_B L_B^2 \cdot \dot{\theta}^2 \right] &= C_B \cdot \dot{\theta} - \frac{1}{2} M_B \cdot L_B \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta - M_B \cdot L_B \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \\ \frac{4}{3} M_B \cdot L_B^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} &= C_B \cdot \dot{\theta} - \frac{3}{2} M_B \cdot L_B \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \\ \frac{4}{3} M_B \cdot L_B^2 \ddot{\theta} &= C_B - \frac{3}{2} M_B \cdot L_B \cdot g \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

**Q2.** Avec  $M_A = 2 \cdot M_B = 2 \cdot M$  et  $L_A = 2 \cdot L_B = 2 \cdot L$ , les deux relations deviennent :

$$\begin{aligned} C_A &= M_A \frac{L_A^2}{3} \cdot \dot{\theta} + L_A \cdot M_A \cdot g \cdot \cos \theta &= \frac{8}{3} M \cdot L^2 \cdot \dot{\theta} + 4 \cdot M \cdot L \cdot g \cdot \cos \theta \\ C_B &= \frac{4}{3} M_B \cdot L_B^2 \ddot{\theta} + \frac{3}{2} M_B \cdot L_B \cdot \cos \theta &= \frac{4}{3} M \cdot L^2 \cdot \dot{\theta} + \frac{3}{2} \cdot M \cdot L \cdot g \cdot \cos \theta \\ C_A - C_B &= \frac{4}{3} M \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \cdot M \cdot L \cdot g \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

si on suppose la vitesse constante dans le quadrant  $\theta = [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  alors  $C_A > C_B$ , pour le deuxième type, le couple moteur est donc inférieur.