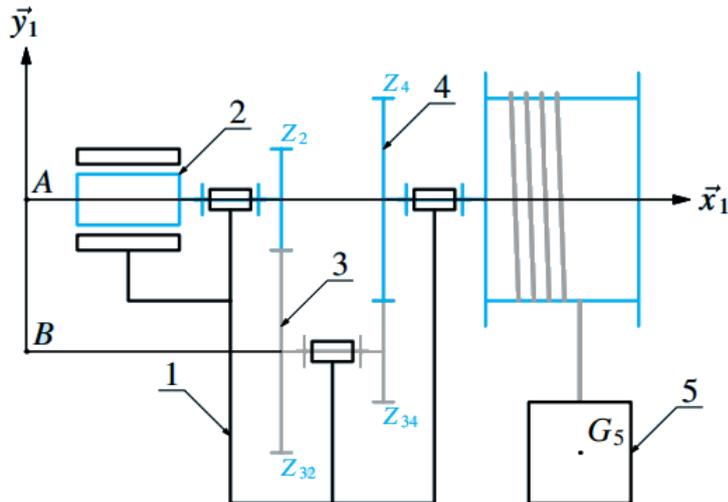


## Motorisation d'un treuil

Le treuil équipant un portique industriel comprend la chaîne cinématique décrite sur la figure ci-dessous



Ce mécanisme comprend cinq ensembles :

- un bâti, auquel on attache on repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un arbre moteur 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
  - il est attaché au rotor du moteur électrique ;
  - il comporte un pignon de  $Z_2$  dents.
- un arbre intermédiaire 3, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
  - il comporte un premier pignon, noté  $3_2$ , de  $Z_{32}$  dents en prise avec le pignon 2 ;
  - il comporte un second pignon, noté  $3_4$ , de  $Z_{34}$  dents.
- un tambour 4, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
  - il comporte un pignon de  $Z_4$  dents en prise avec le pignon  $3_4$  ;
  - sur le tambour est enroulé un câble supposé inextensible et sans masse ;
  - le tambour est de rayon noté  $R$ .
- une charge soulevée 5 de masse  $M$ .

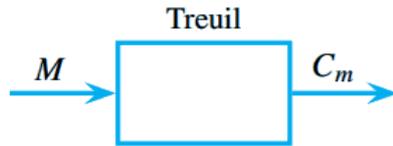
Hypothèses générales pour chacun des arbres 2, 3 et 4 :

- on suppose les liaisons sans frottement ;
- les centres de masse  $G_i$  sont sur les axes de rotation ;
- on note  $J_i$  leur moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Données complémentaires :

- on note  $g$  l'accélération de la pesanteur orientée suivant  $-\vec{y}_1$  ;
- on note  $C_m$  le couple moteur exercé par le stator sur le rotor.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi entrée-sortie  $C_m = f(M)$  en vue de dimensionner le moteur électrique.



1. Déterminer la relation entre  $v_{51}$  la vitesse de déplacement de la charge par rapport au bâti et  $\omega_{21}$  la vitesse de rotation du moteur.
2. Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble  $\Sigma = \{2,3,4,5\}$  dans son mouvement par rapport au bâti.
3. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au mouvement  $\Sigma/1$  et en déduire la loi entrée-sortie recherchée.
4. Interpréter les différents termes trouvés.

On suppose maintenant un couple résistant au niveau de la liaison entre le tambour et le bâti. Il est dû à un phénomène de frottement visqueux caractérisé par un coefficient  $\mu$ .

5. Modifier la loi entrée-sortie précédente en conséquence.

## Retourneur

Un mécanisme de transport de papier utilise pour un transfert entre deux postes de travail, un retourneur. Une bobine de papier est placée sur le retourneur puis celui-ci effectue une rotation d'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le retourneur est en liaison pivot parfaite avec le bâti. Un couple moteur de module  $C_m$  est appliqué sur le retourneur.

La bobine (B) est un cylindre creux de diamètre extérieur  $D_e = 330\text{mm}$ , de diamètre intérieur  $D_i = 120\text{mm}$ , de hauteur  $h = 98\text{mm}$ , homogène de masse  $M_B = 6,5\text{kg}$  et de centre de gravité  $G_B$  ( $\vec{OG}_B \cdot \vec{y}_1 = y_B$ ,  $y_B = 350\text{mm}$ ).

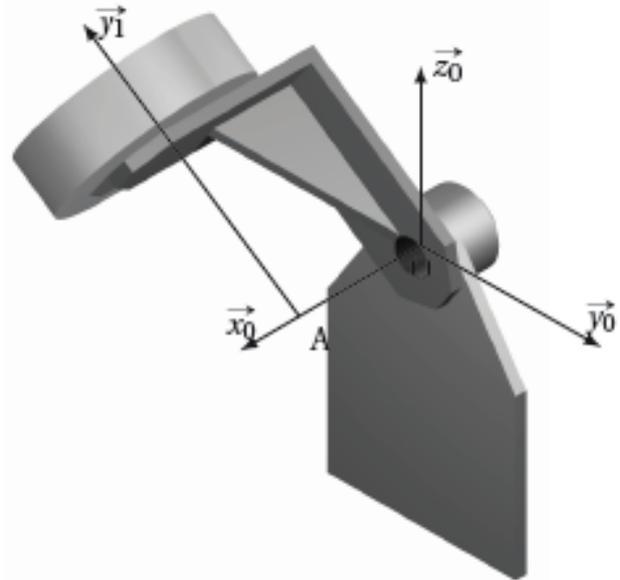


FIGURE 4.5 – Retourneur

Le retourneur (R) est de masse  $M_R$  ( $M_R = 22\text{kg}$ ), de centre de gravité  $G_R$  ( $\vec{OG}_R \cdot \vec{y}_1 = y_R$ ,  $y_R = 200\text{mm}$ ), la matrice d'inertie du retourneur en O dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(R)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_O$$

$(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

avec  $A = 0,35\text{kgm}^2$ ,  $B = 0,28\text{kgm}^2$ ,  $C = 0,57\text{kgm}^2$ ,  $D = 0\text{kgm}^2$ ,  $E = 0\text{kgm}^2$  et  $F = 0,2\text{kgm}^2$ .

**Q1.** Déterminez la matrice d'inertie en  $G_B$  de la bobine dans base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . En déduire le moment d'inertie par rapport à  $(O, \vec{x}_0)$  de la bobine.

**Q2.** Déterminez le moment d'inertie de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{retourneur, bobine}\}$  par rapport à  $(O, \vec{x}_0)$ .

**Q3.** Faire l'inventaire des actions appliquées sur l'ensemble  $\Sigma$ .

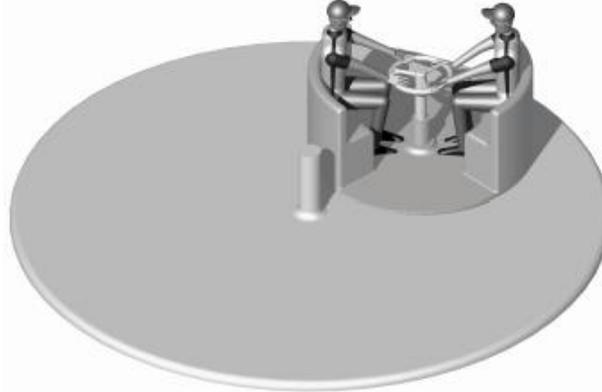
**Q4.** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $\Sigma$ .

**Q5.** Déterminer la puissance des efforts extérieurs sur cet ensemble.

**Q6.** Déterminer, à partir du théorème de l'énergie cinétique, l'équation différentielle du mouvement.

## Manège

Un manège (figure 4.8) est constitué d'un plateau (1) libre en rotation par rapport au sol 0 (liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$ ) et d'une nacelle (2) sur laquelle peuvent prendre place des enfants.



La nacelle est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  par rapport au plateau.

- Le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au sol et supposé galiléen ;
- le repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié au plateau avec  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  et  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à la nacelle avec  $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$ ,  $\vec{OA} = a \cdot \vec{x}_1$  et  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ .

Deux enfants s'installent sur la nacelle et mettent en mouvement l'ensemble en appliquant sur le volant solidaire du plateau un couple  $\vec{C}_e = C_e \cdot \vec{z}_0$ .

Le moment d'inertie du plateau de masse  $m_1$  par rapport à l'axe de rotation est noté  $I_1$ . Le centre d'inertie du plateau est sur l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ .

On suppose les enfants solidaires de la nacelle (même classe d'équivalence cinématique). Le moment d'inertie de l'ensemble formé par la nacelle et les deux enfants par rapport à l'axe de rotation est noté  $I_2$  et sa masse  $m_2$ .

Le centre d'inertie de l'ensemble formé par la nacelle et les deux enfants est sur l'axe  $(A, \vec{z}_2)$ .

On pose :  $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{z}_0$ ,  $\vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{20} \cdot \vec{z}_0$ ,  $\vec{\Omega}_{2/1} = \omega_{21} \cdot \vec{z}_0$ .

Toutes les liaisons sont parfaites.

- Q1.** Tracez le graphe des liaisons de ce mécanisme.
- Q2.** Faites le bilan des actions extérieures et de liaisons.
- Q3.** Combien de degrés de mobilité possède ce système mécanique ? En déduire le nombre d'équations différentielles nécessaires pour étudier le mouvement.
- Q4.** Quelles équations peut-on écrire qui ne font pas apparaître d'inconnues de liaisons ? Justifiez.
- Q5.** Déterminez le moment cinétique de l'ensemble  $\{1,2\}$  en projection sur l'axe de rotation, puis le moment dynamique.
- Q6.** Écrivez le théorème du moment dynamique en projection  $(O, \vec{z}_0)$ , que constatez-vous ? En déduire qu'il y a conservation du moment cinétique.
- Q7.** En déduire la relation entre  $\omega_{20}$ ,  $\omega_{10}$ , en fonction de  $\omega_{21}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $m_2$  et  $a$ .
- Q8.** Appliquez le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $\{1,2\}$ , donnez la relation liant le couple  $C_e$  et  $\omega_{21}$ .

## Barrière de parking

On se propose de comparer d'un point de vue dynamique le comportement de deux barrières de parking.

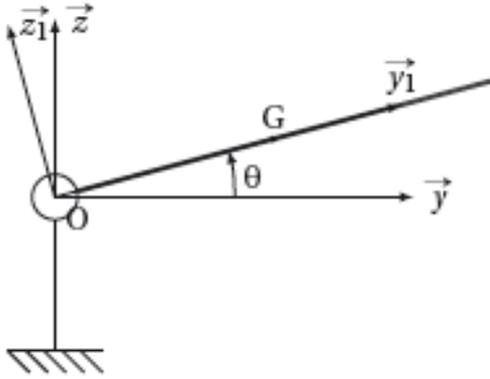


FIGURE 4.9 – Barrière Type A

La barrière type A est un profilé en aluminium de longueur  $L_A = 2 \cdot L = 2\text{ m}$  et de masse  $M_A = 2 \cdot M$ .

La barrière de type B est composée de deux demi-barrières (1) et (2) de masse  $M_B = M$  et de longueur  $L_B = L = 1\text{ m}$ . La demi barrière extrême (2) est toujours parallèle au sol (parallélogramme  $OAA_2O_2$ ).

On note  $C_A$  le couple moteur agissant sur la barrière de type A et respectivement  $C_B$  pour la barrière de type B.

Hypothèses et données complémentaires :

- on modélise d'un point de vue cinétique, chaque barrière par une tige sans épaisseur;
- le centre d'inertie de chaque barrière (demi-barrière) est à mi-longueur;
- la tige de rappel (3) de la barrière de type B est de masse et inertie négligeable.

**Q1.** Déterminer dans les deux cas l'équation différentielle donnant le couple moteur nécessaire pour lever la barrière par la méthode de votre choix.

**Q2.** Comparer les deux couples moteurs  $C_A$  et  $C_B$  pour une même loi de vitesse. Conclure.

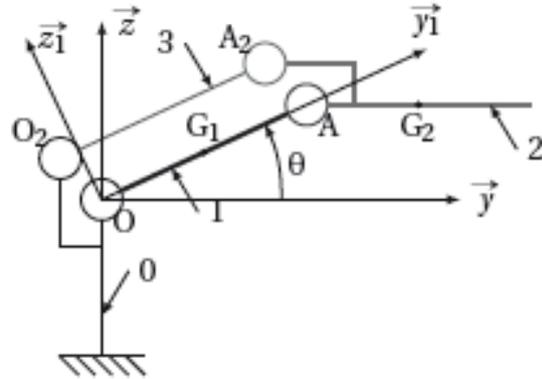


FIGURE 4.10 – Barrière Type B