Équilibrage des rotors

Sommaire

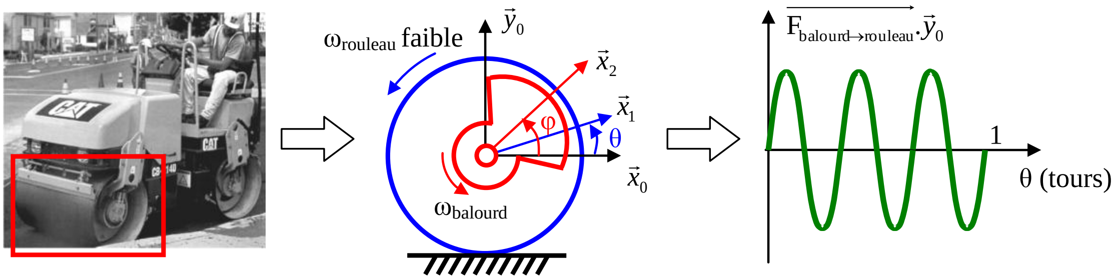
Exemples de système :

Rouleau de compacteur, rotor de turbine, roue de voiture…

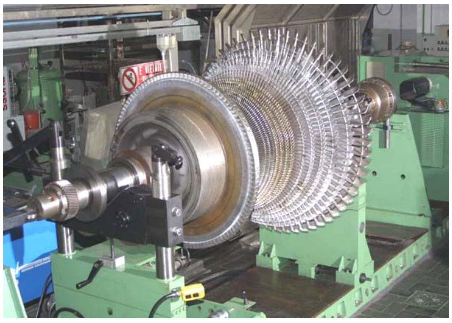
Lorsqu'un solide est entraîné en rotation autour d'un axe fixe et qu'il possède une mauvaise répartition de matière autour de cet axe, l'application du Principe Fondamental de la Dynamique permet de montrer que des forces centrifuges tournantes s'exercent sur ce solide.

Sur certains systèmes cette « mauvaise répartition » peut être volontairement recherchée afin de générer des vibrations. Par exemple dans le cas d'un rouleau de compacteur, les vibrations provoquées par le balourd tournant sont dans ce cas, utiles au compactage du sol.

Réel ***Modèle*** ***Simulation***



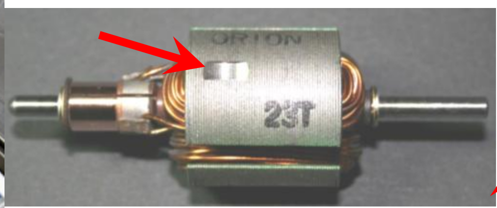
Par contre, dans la plupart des applications où des solides sont entraînés en rotation, ces forces tournantes sont indésirables car elles provoquent des vibrations nuisibles. Celles-ci peuvent engendrer une détérioration rapide des liaisons ainsi qu'une gêne pour l'utilisateur du matériel. Pour supprimer ces vibrations dues aux masses mal réparties, on réalise un **équilibrage**. Cet équilibrage est d'autant plus nécessaire que la vitesse de rotation est grande.

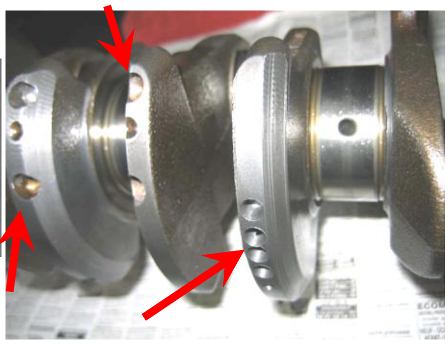
Equilibrage du rotor turbine

Les solutions correctives d'équilibrage des rotors sont réalisées par ajout de matière (masses d'équilibrage) ou enlèvement de matière (perçage ou meulage). Les conditions d'équilibrage sont en général déterminées à l'aide de « **machines d'équilibrage** » qui mesurent les déformations et donc les efforts variables générés par le rotor lors de sa rotation sur le support de cette machine.
L'équilibrage est aussi parfois réalisé sur site avec des analyseurs portatifs. Ces appareils permettent de déterminer rapidement l'état de déséquilibre des machines et installations. Ils permettent ainsi de procéder à l'équilibrage de rotors sans avoir à les déposer, ce qui permet d'obtenir un coût d'équilibrage particulièrement attractif. Ces appareils utilisent en général les informations fournies par des accéléromètres et un capteur de vitesse angulaire.

Masselotte de roue de voiture



Meulage sur rotor de moteur électrique



Perçages sur vilebrequin

Equilibreuse de roue de voiture

Equilibrage d'un essieu de train

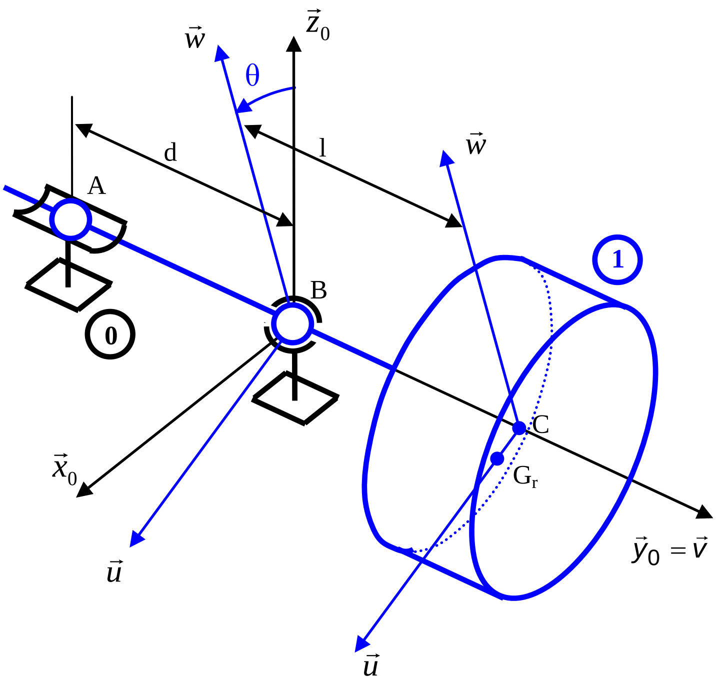
Equilibreuse portative

L'objectif de ce cours est :

- de définir les hypothèses permettant de poser un modèle lié à un problème d'équilibrage ;
- d'exprimer de façon pratique les conditions d'équilibrage d'un rotor ;
- de mettre en place les démarches de calcul permettant de résoudre un problème d'équilibrage par ajout de masselottes.

1 Hypothèses et modélisation retenue

Considérons un rotor 1 non équilibré en mouvement de rotation suivant l'axe (A, $\vec{y}_0$) par rapport à un bâti 0 :



Structurellement la liaison entre le rotor 1 et le bâti 0 est réalisée à l'aide de roulements à billes aux point A et B. On considère donc dans le modèle, que le rotor 1 est en liaison sphérique de centre B avec le bâti 0 et en liaison sphère-cylindre de centre A et de direction $\vec{y}_0$ avec le bâti 0.

On définit le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti 0 et le repère $(O, \vec{u}, \vec{v} = \vec{y}_0, \vec{w})$ lié au rotor 1. On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{u})$ tel que $\dot{\theta} = \omega . t$ avec ω = constante.

Le rotor de masse m_r, a pour centre de gravité G_r tel que $\overrightarrow{BG_r} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG_r} = l.\vec{y}_0 + a.\vec{u}$ et pour matrice d'inertie $\overline{\overline{I_C(1)}} = {}_C\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$.

Le stator (bâti 0) exerce sur le rotor 1 un couple moteur noté $C_m.\vec{y}_0$.

2 Conditions d'équilibrage

2.1 Définition de l'équilibrage dynamique d'un rotor

Un rotor est équilibré dynamiquement si les actions mécaniques dans les liaisons entre le rotor 1 et le bâti 0 sont indépendantes de la position angulaire du rotor quel que soit le mouvement de rotation du rotor.

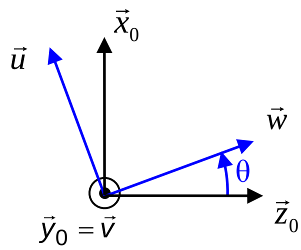
2.2 Conséquences pratiques : équilibrage statique et équilibrage dynamique

Pour déterminer les inconnues de la liaison, il faut isoler le rotor et lui appliquer le PFD au point B :

$$ {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{d\ 1/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{B,\ 1/0}} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{1}\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{B(\bar{1}\to 1)}} \end{Bmatrix} $$

Calcul du torseur des actions mécaniques extérieures :

$$ {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{1}\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{B(\bar{1}\to 1)}} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0 + X_{B01}.\vec{x}_0 + Y_{B01}.\vec{y}_0 + Z_{B01}.\vec{z}_0 - m_r.g.\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BA} \wedge (X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0) + \overrightarrow{BG_r} \wedge (-m_r.g.\vec{z}_0) + C_m.\vec{y}_0 \end{Bmatrix} $$



$$ \overrightarrow{BA} \wedge (X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0) = -d.\vec{y}_0 \wedge (X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0) = d.X_{A01}.\vec{z}_0 - d.Z_{A01}.\vec{x}_0 $$

$$ \overrightarrow{BG_r} \wedge (-m_r.g.\vec{z}_0) = (l.\vec{y}_0 + a.\vec{u}) \wedge (-m_r.g.\vec{z}_0) = -m_r.g.l.\vec{x}_0 + m_r.g.a.\cos\theta.\vec{y}_0 $$

Calcul de la résultante dynamique :

$$\overrightarrow{R_{C\,1/0}} = m_r.\overrightarrow{V_{G_r\ r/0}} = -m_r.a.\dot{\theta}.\vec{w}$$

$$\overrightarrow{R_{d\,1/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{R_{C\,1/0}}\Big|_0 = -m_r.a.\dot{\theta}^2.\vec{u}$$

Calcul du moment dynamique :

$$\overrightarrow{\sigma_{C,\,1/0}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{C\,(\vec{u},\vec{v},\vec{w})} .\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -F.\dot{\theta}.\vec{u} + B.\dot{\theta}.\vec{y}_0 - D.\dot{\theta}.\vec{w}$$

$$\overrightarrow{\delta_{C,\,1/0}} = F.\dot{\theta}^2.\vec{w} - D.\dot{\theta}^2.\vec{u}$$

$$\overrightarrow{\delta_{B,\,1/0}} = \overrightarrow{\delta_{C,\,1/0}} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_{d\,1/0}} = F.\dot{\theta}^2.\vec{w} - D.\dot{\theta}^2.\vec{u} + l.\vec{y}_0 \wedge (-m_r.a.\dot{\theta}^2.\vec{u}) = F.\dot{\theta}^2.\vec{w} - D.\dot{\theta}^2.\vec{u} + m_r.a.l.\dot{\theta}^2.\vec{w}$$

D’où les 2 équations vectorielles issues du PFD :

$$-m_r.a.\dot{\theta}^2.\vec{u} = X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0 + X_{B01}.\vec{x}_0 + Y_{B01}.\vec{y}_0 + Z_{B01}.\vec{z}_0 - m_r.g.\vec{z}_0$$

$$F.\dot{\theta}^2.\vec{w} - D.\dot{\theta}^2.\vec{u} + m_r.a.l.\dot{\theta}^2.\vec{w} = d.X_{A01}.\vec{z}_0 - d.Z_{A01}.\vec{x}_0 - m_r.g.l.\vec{x}_0 + m_r.g.a.\cos\theta.\vec{y}_0 + C_m.\vec{y}_0$$

Ces 2 équations vectorielles donnent 5 équations scalaires (projection dans la base 0) permettant d’exprimer les 5 inconnues de liaisons:

$$X_{A01} + X_{B01} = -m_r.a.\dot{\theta}^2.\cos\theta \qquad (1)$$

$$Y_{B01} = 0 \qquad (2)$$

$$Z_{A01} + Z_{B01} = m_r.g + m_r.a.\dot{\theta}^2.\sin\theta \qquad (3)$$

$$(F.\dot{\theta}^2 + m_r.a.l.\dot{\theta}^2).\sin\theta - D.\dot{\theta}^2.\cos\theta + m_r.g.l = -d.Z_{A01} \qquad (4)$$

$$(F.\dot{\theta}^2 + m_r.a.l.\dot{\theta}^2).\cos\theta + D.\dot{\theta}^2.\sin\theta = d.X_{A01} \qquad (5)$$

On constate donc que :

- pour que les équations scalaires issues du théorème de la résultante dynamique soient indépendantes de θ, il faut prendre a = 0 :

  Conséquence pratique 1 : Un rotor est équilibré statiquement si son centre de gravité est positionné sur son axe de rotation.

- pour que les équations scalaires issues du théorème du moment dynamique soient indépendantes de la position de θ, il faut prendre F = D = 0 et a = 0.

  Conséquence pratique 2 : Un rotor est équilibré dynamiquement si son centre de gravité est positionné sur son axe de rotation <u>et</u> si son axe de rotation est axe principal d’inertie.

- Dans un équilibrage statique, seule la résultante des actions de 0 sur 1 est indépendante du mouvement du rotor par rapport au bâti.
- Si les calculs sont fait avec un mouvement de rotation accéléré, les conséquences pratiques 1 et 2 restent les mêmes.
- La matrice d’inertie n’est pas obligatoirement diagonale pour avoir l’équilibrage dynamique, seuls les éléments d’inertie de l’axe de rotation importent.

3 Réalisation d'un d'équilibrage par ajout de masselottes

3.1 Principe

Pour que le centre de gravité du rotor soit sur l'axe de rotation, il est nécessaire de rajouter une première masse complémentaire sur le rotor.
Pour que l'axe de rotation soit un axe principal d'inertie, il est nécessaire de rajouter une deuxième masse complémentaire sur le rotor.
Ces deux masses sont fixées aux points M_1 et M_2, à des distances r_1 et r_2 de l'axe de rotation et dans deux plans de position (y_1 et y_2).

On pourrait aussi enlever les mêmes masses aux points N_1 et N_2 symétriques des points M_1 et M_2 par rapport à l'axe de rotation (enlever des masses = ajout de masses négatives…).

3.2 Modèle

Aux éléments préalablement définis dans le modèle de la partie 1. Hypothèses et modélisation retenue, on ajoute les éléments suivants :

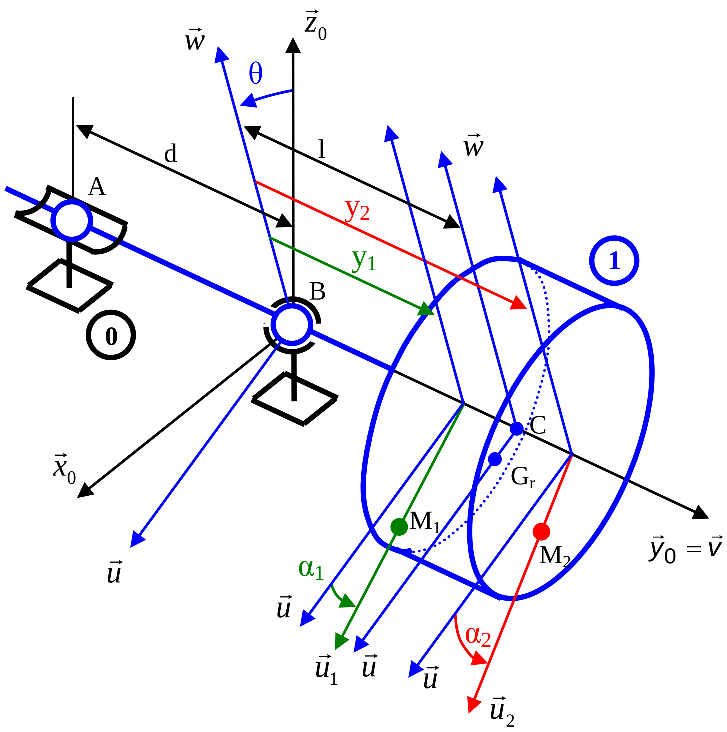
La masse m_1 est fixée au point M_1 positionné dans le plan y_1 à la distance r_1 de l'axe de rotation suivant l'axe $\vec{u}_1$ décalé de α_1 = cte par rapport à $\vec{u}$:

$$\overrightarrow{BM_1} = y_1.\vec{y}_0 + r_1.\vec{u}_1$$

La masse m_2 est fixée au point M_2 positionné dans le plan y_2 à la distance r_2 de l'axe de rotation suivant l'axe $\vec{u}_2$ décalé de α_2 = cte par rapport à $\vec{u}$:

$$\overrightarrow{BM_2} = y_2.\vec{y}_0 + r_2.\vec{u}_2$$

Les masses m_1 est m_2 sont supposées ponctuelles.



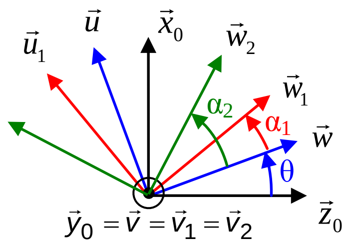
3.3 Inconnues du problème d'équilibrage

La réalisation de l'équilibrage à l'aide des masselottes m_1 et m_2 consiste à définir les 8 paramètres inconnus associés aux masselottes qui sont :

- les 3 paramètres de position (r_1, y_1, α_1) et la masse (m_1) pour la masselotte 1,
- les 3 paramètres de position (r_2, y_2, α_2) et la masse (m_2) pour la masselotte 2.

3.4 Mise en équation à l'aide du PFD

On isole l'ensemble E = rotor + masselotte 1 + masselotte 2 et on lui applique le PFD au point B :



$$_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{d\ E/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{B,\,E/0}} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} \\ \overrightarrow{M_{B(\bar{E}\to E)}} \end{Bmatrix}$$

Calcul du torseur des actions mécaniques extérieures :

$$_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} \\ \overrightarrow{M_{B(\bar{E}\to E)}} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0 + X_{B01}.\vec{x}_0 + Y_{B01}.\vec{y}_0 + Z_{B01}.\vec{z}_0 - (m_r + m_1 + m_2).g.\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BA} \wedge (X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0) + \overrightarrow{BG_r} \wedge (-m_r.g.\vec{z}_0) + \overrightarrow{BM_1} \wedge (-m_1.g.\vec{z}_0) + \overrightarrow{BM_2} \wedge (-m_2.g.\vec{z}_0) + C_m.\vec{y}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge (X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0) = -d.\vec{y}_0 \wedge (X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0) = d.X_{A01}.\vec{z}_0 - d.Z_{A01}.\vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{BG_r} \wedge (-m_r.g.\vec{z}_0) = (l.\vec{y}_0 + a.\vec{u}) \wedge (-m_r.g.\vec{z}_0) = -m_r.g.l.\vec{x}_0 + m_r.g.a.\cos\theta.\vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{BM_1} \wedge (-m_1.g.\vec{z}_0) = (y_1.\vec{y}_0 + r_1.\vec{u}_1) \wedge (-m_1.g.\vec{z}_0) = -m_1.g.y_1.\vec{x}_0 + m_1.g.r_1.\cos(\alpha_1 + \theta).\vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{BM_2} \wedge (-m_2.g.\vec{z}_0) = (y_2.\vec{y}_0 + r_2.\vec{u}_2) \wedge (-m_2.g.\vec{z}_0) = -m_2.g.y_2.\vec{x}_0 + m_2.g.r_2.\cos(\alpha_2 + \theta).\vec{y}_0$$

Calcul de la résultante dynamique :

$$\overrightarrow{R_{C\ E/0}} = m_r.\overrightarrow{V_{G_r\ r/0}} + m_1.\overrightarrow{V_{M_1\ masselotte1/0}} + m_2.\overrightarrow{V_{M_2\ masselotte2/0}}$$

$$\overrightarrow{R_{C\ E/0}} = -m_r.a.\dot{\theta}.\vec{w} - m_1.r_1.\dot{\theta}.\vec{w}_1 - m_2.r_2.\dot{\theta}.\vec{w}_2$$

$$\overrightarrow{R_{d\ E/0}} = \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{R_{C\ E/0}}\right|_0 = -m_r.a.\dot{\theta}^2.\vec{u} - m_1.r_1.\dot{\theta}^2.\vec{u}_1 - m_2.r_2.\dot{\theta}^2.\vec{u}_2$$

Calcul du moment dynamique :

On garde l'expression $\overrightarrow{\delta_{B,\,1/0}} = F.\dot{\theta}^2.\vec{w} - D.\dot{\theta}^2.\vec{u} + m_r.a.l.\dot{\theta}^2.\vec{w}$ calculée précédemment et on y ajoute $\overrightarrow{\delta_{B,\ masselotte1/0}} + \overrightarrow{\delta_{B,\ masselotte2/0}}$

$$\overrightarrow{\delta_{B,\ masselotte1/0}} = \overrightarrow{\delta_{M_1,\ masselotte1/0}} + \overrightarrow{BM_1} \wedge \overrightarrow{R_{d\ masselotte1/0}} = (y_1.\vec{y}_0 + r_1.\vec{u}_1) \wedge (-m_1.r_1.\dot{\theta}^2.\vec{u}_1) = m_1.r_1.y_1.\dot{\theta}^2.\vec{w}_1$$

$$\overrightarrow{\delta_{B,\ masselotte2/0}} = \overrightarrow{\delta_{M_2,\ masselotte2/0}} + \overrightarrow{BM_2} \wedge \overrightarrow{R_{d\ masselotte2/0}} = (y_2.\vec{y}_0 + r_2.\vec{u}_2) \wedge (-m_2.r_2.\dot{\theta}^2.\vec{u}_2) = m_2.r_2.y_2.\dot{\theta}^2.\vec{w}_2$$

D'où les 2 équations vectorielles issues du PFD :

$$-m_r.a.\dot{\theta}^2.\vec{u} - m_1.r_1.\dot{\theta}^2.\vec{u}_1 - m_2.r_2.\dot{\theta}^2.\vec{u}_2 = X_{A01}.\vec{x}_0 + Z_{A01}.\vec{z}_0 + X_{B01}.\vec{x}_0 + Y_{B01}.\vec{y}_0 + Z_{B01}.\vec{z}_0 - (m_r + m_1 + m_2).g.\vec{z}_0$$

$$\begin{aligned} F.\dot{\theta}^2.\vec{w} - D.\dot{\theta}^2.\vec{u} + m_r.a.l.\dot{\theta}^2.\vec{w} + m_1.r_1.y_1.\dot{\theta}^2.\vec{w}_1 + m_2.r_2.y_2.\dot{\theta}^2.\vec{w}_2 &= C_m.\vec{y}_0 + d.X_{A01}.\vec{z}_0 - d.Z_{A01}.\vec{x}_0 - m_r.g.l.\vec{x}_0 \\ &+ m_r.g.a.\cos\theta.\vec{y}_0 - m_1.g.y_1.\vec{x}_0 + m_1.g.r_1.\cos(\alpha_1 + \theta).\vec{y}_0 - m_2.g.y_2.\vec{x}_0 + m_2.g.r_2.\cos(\alpha_2 + \theta).\vec{y}_0 \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire les 4 équations scalaires utiles à la résolution du problème (projection suivant $\vec{x}_0$ et $\vec{z}_0$ des 2 équations vectorielles précédentes) :

$$X_{A01} + X_{B01} = -m_r.a.\dot{\theta}^2.\cos\theta - m_1.r_1.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha_1+\theta) - m_2.r_2.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha_2+\theta) \quad (10)$$
$$Z_{A01} + Z_{B01} = (m_r + m_1 + m_2).g + m_r.a.\dot{\theta}^2.\sin\theta + m_1.r_1.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha_1+\theta) + m_2.r_2.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha_2+\theta) \quad (11)$$

$$(F.\dot{\theta}^2 + m_r.a.l.\dot{\theta}^2).\sin\theta - D.\dot{\theta}^2.\cos\theta + m_1.r_1.y_1.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha_1+\theta) + m_2.r_2.y_2.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha_2+\theta) = -d.Z_{A01} - m_r.g.l - m_1.g.y_1 - m_2.g.y_2 \quad (12)$$
$$(F.\dot{\theta}^2 + m_r.a.l.\dot{\theta}^2).\cos\theta + m_1.r_1.y_1.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha_1+\theta) + m_2.r_2.y_2.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha_2+\theta) + D.\dot{\theta}^2.\sin\theta = d.X_{A01} \quad (13)$$

3.5 Résolution pratique du problème d'équilibrage

Les systèmes d'équilibrage (équilibreuses) sont instrumentés pour permettre la mesure des actions mécaniques dans les liaisons bâti/rotor en A et B ($X_{A01}, X_{B01}, Z_{A01}, Z_{B01}$), ainsi que la mesure de la géométrie des masses du rotor non équilibré (m_r, a, F, D).

Il reste au calculateur à résoudre un système de 4 équations et 8 inconnues (m_1, y_1, r_1, α_1 *et* m_2, y_2, r_2, α_2). Il existe donc à priori une infinité de solutions.

Dans la réalité des contraintes pratiques de réalisation limitent le nombre de solution. Ainsi dans le cas d'une équilibreuse de roue de voiture (voir photos ci-dessous), les masses d'équilibrage ne peuvent être fixées que sur le pourtour de la jante (de rayon R, de largeur L) de chaque coté du pneu.

Le calculateur de l'équilibreuse détermine au final les 4 inconnues m_1, α_1, m_2 et α_2.

Équilibreuse de roue de voiture

Masselotte de roue de voiture

Remarque : Dans la pratique la résolution du problème d'équilibrage ne se fait heureusement pas à partir du P.F.D., on résout ce problème en partant des conséquences pratiques vues paragraphe 2.2, cela revient au final à résoudre un problème de géométrie des masses (voir TD).