Détermination de marges de stabilité sur un diagramme de BODE

1. Le système peut être représenté par le schéma-bloc suivant :

2. Les constructions graphiques relatives à la détermination des marges de stabilité sont représentées sur la figure 5.51.

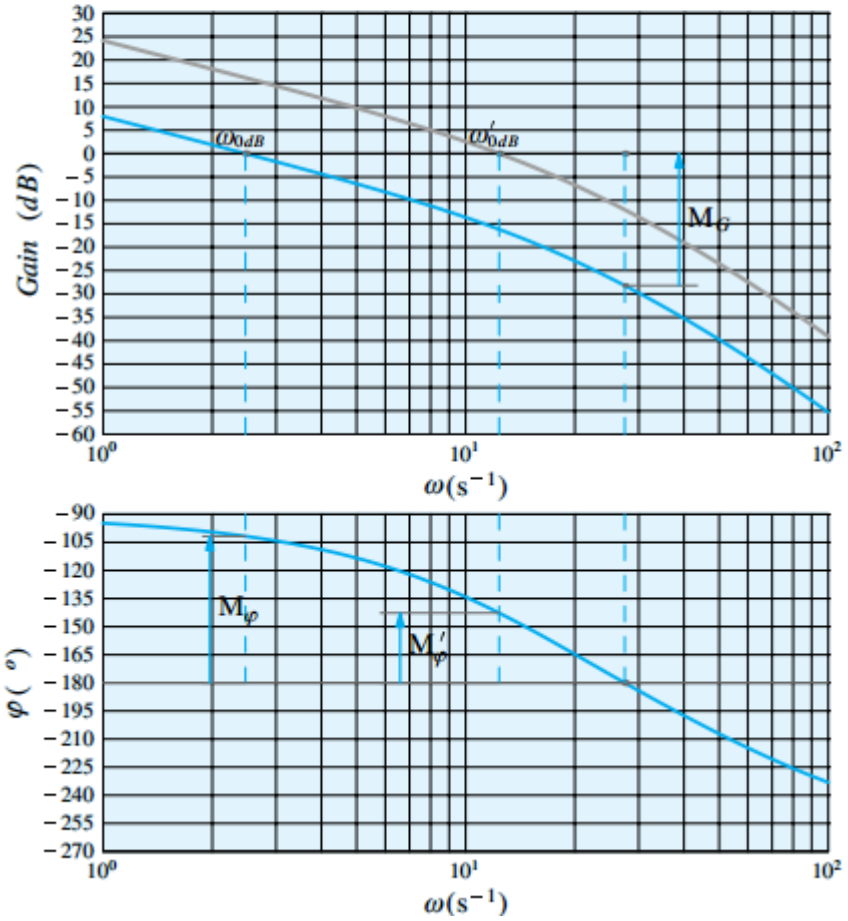


Figure 5.51 Diagrammes de BODE de la FTBO – solution.

- Détermination de la marge de phase :
  - On recherche sur le diagramme de gain la pulsation de coupure à 0 dB notée $\omega_{0\,\mathrm{dB}}$.
  - Pour la pulsation $\omega_{0\,\mathrm{dB}}$, on recherche la phase de la FTBO. On évalue $\varphi(\omega_{0\,\mathrm{dB}}) = -102°$.
  - La marge de phase est $M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180°$ d'où

$$M_\varphi = +78°$$

- Détermination de la marge de gain :
  - Sur le diagramme de phase, on recherche la pulsation pour laquelle la phase vaut $-180°$.
  - Pour cette pulsation ω_{-180}, on relève le gain de la FTBO soit

$$20\,\text{Log}\,|F(j\omega_{-180})| = -28\,\text{dB}$$

  - La marge de gain est $M_G = 0 - 20\,\text{Log}\,|F(j\omega_{-180})|$ soit

$$M_G = 28\,\text{dB}$$

- Conclusion : le système, qui présente une marge de phase $M_\varphi = +78°$ et une marge de gain $M_G = 28\,\text{dB}$, est stable.

3. Une correction proportionnelle de gain K_p entraîne une seule modification des diagrammes de BODE : la courbe de gain est translatée de $20\,\text{Log}(K_p)$.

- Détermination de K_p assurant une marge de gain de $M_G = 12\,\text{dB}$.
  - Le diagramme de phase n'étant pas modifié par l'ajout du correcteur proportionnel, la pulsation ω_{-180} est inchangée.
  - Pour cette pulsation, le gain de la FTBO corrigée doit être $-12\,\text{dB}$, de sorte que la marge de gain du système corrigé soit $M_G = 12\,\text{dB}$.
  - Par suite, il faut translater la courbe de gain de $16\,\text{dB}$ vers le haut.
  - Le gain K_p doit alors vérifier $20\,\text{Log}\,(K_p) = 16\,\text{dB}$ et

$$K_p = 6{,}3$$

- Détermination de la nouvelle marge de phase :

  On recherche la nouvelle pulsation de coupure à $0\,\text{dB}$ notée $\omega'_{0\,\text{dB}}$. En procédant comme à la question précédente, on trouve la nouvelle marge de phase :

$$M_\varphi = +37\,°$$

• Conclusions :

– Le système, qui présente une marge de phase $M_\varphi = +37\,°$ et une marge de gain $M_G = 12\,\text{dB}$, est stable.

– La nouvelle marge de phase est faible : le système corrigé est plus rapide mais plus oscillant.

– Si on se limite à une correction proportionnelle, il est souhaitable, pour optimiser le fonctionnement, de déterminer K_p pour obtenir une marge de phase de l'ordre de 45°. Ainsi, la marge de gain du système corrigé est supérieure à la valeur minimale de 12 dB.

4. Pour le système corrigé, l'écart $\varepsilon(p)$ est lié à $X(p)$ par la relation

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K_p.F(p)} X(p)$$

On considère une entrée indicielle $x(t) = u(t)$ qui a pour transformée de LAPLACE

$$X(p) = \frac{1}{p}$$

L'écart statique pour une entrée indicielle est

$$\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p)$$

$$= \lim_{p \to 0} p.\frac{1}{1 + K_p.F(p)}.\frac{1}{p} = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1 + K_p.F(p)}$$

Les diagrammes de BODE de $K_p.F(p)$, compte tenu des premières asymptotes indiquent que cette fonction de transfert est de classe 1. Par suite, l'écart statique pour une entrée indicielle est

$$\varepsilon_s = 0$$

Asservissement à correction proportionnelle

1. La FTBO du système est

$$FTBO(j\omega) = \frac{C\,k}{j\omega(1+j\omega\tau)^2}$$

Par suite :

- cette FTBO est d'ordre 3 et de classe 1 ;
- la phase est : $\varphi(\omega) = -90\,° - 2\,\text{arctg}(\omega\tau)$;
- la phase prend la valeur $-180\,°$ lorsque $\omega\tau = 1$.

Par suite la pulsation demandée est $\omega_{-180°} = 1/\tau$.

2. Pour le calcul de C_1, on établit que :

- pour $\omega_{-180°} = 1/\tau$, le module de la FTBO est $|FTBO(j/\tau)| = \dfrac{C\,k\,\tau}{2}$;
- le système est à la limite de la stabilité si son lieu de BLACK passe par le point critique, c'est-à-dire si le module de la FTBO vaut 1 et la phase vaut $-180\,°$ pour une même pulsation.

Par suite la valeur C_1 demandée est solution de l'équation $\dfrac{C_1\,k\,\tau}{2} = 1$.

On en déduit que :

$$C_1 = \frac{2}{k\,\tau} \qquad \text{puis} \qquad C_1 = 2$$

après application numérique.

3. Une marge de gain de 12 dB correspond à un module de $FTBO(j\omega_{-180°})$ tel que

$$20\ \text{Log}\ (|FTBO(j\omega_{-180°})|) = -12$$

soit

$$|FTBO(j\omega_{-180°})| = 10^{(-12/20)} \simeq 1/4$$

Pour assurer la marge de gain de 12 dB il faut diviser C_1 par 4. On obtient finalement :

$$C_2 = 0{,}5$$

Lecture de marges et correction proportionnelle

1. Les tracés asymptotiques des diagrammes de la figure 5.29 permettent de déterminer :

- deux pulsations de cassure pour $\omega_1 = 0{,}1\,\text{rad/s}$ et $\omega_2 = 2\,\text{rad/s}$, qui correspondent aux deux constantes de temps $\tau_1 = 10\,s$ et $\tau_2 = 0{,}5\,s$;
- que la fonction est de classe 1 car les premières asymptotes correspondent à une pente de $-20\,\text{dB/décade}$ et à $-90°$;
- que la fonction a un dénominateur de degré égal au degré du numérateur plus 3 car les dernières asymptotes correspondent à une pente de $-60\,\text{dB/décade}$ et à $-270°$.
- que la première asymptote du diagramme de gain passe par le point $(0{,}1\,;\,20\,\text{dB})$.

Compte tenu de tous ces éléments, les diagrammes de la figure 5.29 correspondent à la fonction de transfert

$$F(p) = \frac{1}{p\,(1+10p)\,(1+0{,}5p)}$$

Cette fonction est la FTBO du système représenté figure 5.28 pour $C = 1$.

2. Marges de phase et de gain avant réglage du correcteur.

- Détermination de la marge de phase :
  - sur le diagramme de gain, on recherche la pulsation qui correspond à un gain nul. On trouve $\omega_{0dB} = 0{,}3\,\text{rad/s}$;
  - pour la pulsation $\omega_{0\,\text{dB}}$, la phase est $\varphi(\omega_{0dB}) = -171°$;
  - on calcule la marge de phase par $M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180°$ soit $M_\varphi = 9°$

- Détermination de la marge de gain :
  - sur le diagramme de phase, on recherche la pulsation qui correspond à une phase de $-180°$. On trouve $\omega_{-180°} = 0{,}45\,\text{rad/s}$;
  - pour la pulsation $\omega_{-180°}$, le gain est $G_{dB}(\omega_{-180°}) = -7\,\text{dB}$;
  - la marge de gain est donc

$$M_G = 7\,\text{dB}$$

3. Réglage du correcteur

- Critère « marge de phase de 40° » :

– on veut $M_\varphi = \varphi(\omega_{0\,\text{dB}}) + 180° = 40°$. La pulsation de coupure à 0 dB doit donc être telle que $\varphi(\omega_{0dB}) = -140°$;

– pour la phase de $-140°$, on trouve $\omega_{0\,\text{dB}} = 0{,}11$ rad/s ;

– pour cette pulsation, le gain avant correction vaut 16 dB ;

– pour que cette pulsation devienne la pulsation de coupure à 0 dB, le gain du correcteur doit donc être égal à -16 dB pour obtenir une translation de la courbe de gain de 16 dB vers le bas ;

– le gain du correcteur permettant de satisfaire le critère de marge de phase est donc

$$C = 10^{-\frac{16}{20}} = 0{,}16$$

• Critère « marge de gain de 12 dB » :

– quel que soit le gain C du correcteur, la pulsation qui correspond à une phase de $-180°$ est $\omega_{-180°} = 0{,}45$ rad/s ;

– avant correction, le gain pour cette pulsation est -7 dB. Pour obtenir une marge de gain $M_G = 12$ dB, il faut diminuer le gain de la FTBO de 5 dB ;

– le gain du correcteur permettant de satisfaire le critère de marge de gain est donc

$$C = 10^{-\frac{5}{20}} = 0{,}56$$

La valeur maximum de C permettant de satisfaire simultanément les deux critères est la plus petite des deux, soit :

$$C_{\max} = 0{,}16$$

Remarque : Les réponses indicielles pour les deux corrections $C = 1$ et $C = 0{,}16$ sont présentées figure 5.55. On remarque que le réglage $C = 1$ est moins stable que le réglage $C = 0{,}16$. En effet, dans le premier cas, la réponse indicielle comporte des oscillations de plus grandes amplitude et fréquence.

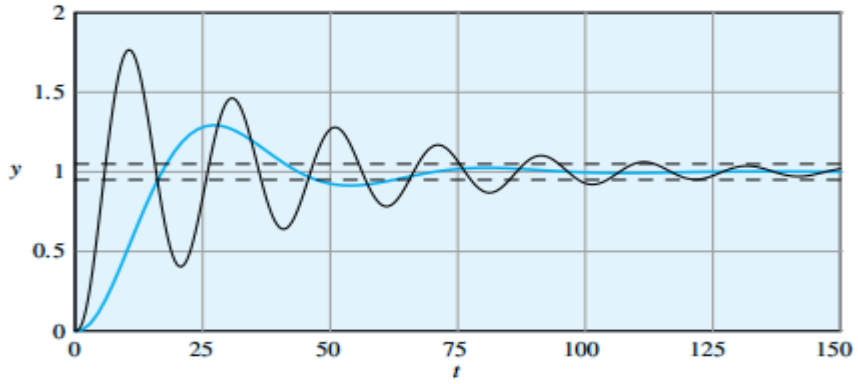


Figure 5.55 Réponses indicielles pour $C = 1$ (en noir) et $C = 0{,}16$ (en bleu).

Choix d'une correction

1. Déterminer la forme du correcteur, c'est résoudre l'équation :

$$\frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)} = \frac{1}{1+2m\frac{p}{\omega_0}+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$$

Cette résolution conduit à :

$$C(p) = \frac{{\omega_0}^2}{pH(p)(2m\omega_0+p)}$$

2. Pour la fonction $H(p)$ donnée $C(p)$ devient :

$$C(p) = \frac{{\omega_0}^2(1+T_1p)(1+T_2p)}{2am\omega_0 p\left(1+\frac{1}{2m\omega_0}p\right)}$$

Pour obtenir une fonction $C(p)$ simple faisant disparaitre la constante T_1, il faut prendre des constantes vérifiant :

$$2m\omega_0 = \frac{1}{T_1}$$

Dans ces conditions, $C(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$C(p) = \frac{1+T_2p}{4m^2aT_1\,p} = \frac{T_2}{4m^2aT_1}\left(1+\frac{1}{T_2p}\right)$$

Il s'agit d'un correcteur PI.

3. Pour $m = 1$, le correcteur est entièrement déterminé en fonction de a, T_1 et T_2 :

$$C(p) = \frac{T_2}{4aT_1}\left(1+\frac{1}{T_2p}\right)$$

4. À l'examen des réponses indicielles données, on constate que :

- sans correction, l'écart statique est important ;
- avec correction proportionnelle, l'écart statique diminue et se rapproche de la valeur 1 (son asymptote est voisine de 0,95). On remarque également des oscillations et un dépassement important. La stabilité du système diminue ;
- la courbe de réponse obtenue avec la correction PI est la plus intéressante parce qu'elle a pour asymptote 1. L'écart statique pour une entrée indicielle est bien nul. Le système semble cependant légèrement moins rapide que les deux autres.

Cette comparaison met en évidence le principal intérêt du correcteur PI : l'annulation de l'écart statique pour une entrée indicielle.

Correction PI

Q1. A partir du critère de Routh déterminer à quelles conditions sur K et T_i le système est stable.

$$BO(p) = C(p)\cdot R(p) = \frac{1+T_i\cdot p}{T_i\cdot p}\cdot\frac{K}{(1+0{,}5\cdot p)(1+5\cdot p)}$$

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1+BO(p)} = \frac{\dfrac{1+T_i\cdot p}{T_i\cdot p}\cdot\dfrac{K}{(1+0{,}5\cdot p)(1+5\cdot p)}}{1+\dfrac{1+T_i\cdot p}{T_i\cdot p}\cdot\dfrac{K}{(1+0{,}5\cdot p)(1+5\cdot p)}}$$

$$BF(p) = \frac{K\cdot\left(1+T_i\cdot p\right)}{T_i\cdot p\cdot(1+0{,}5\cdot p)\cdot(1+5\cdot p)+K\cdot\left(1+T_i\cdot p\right)}$$

$$BF(p) = \frac{2\cdot K\cdot\left(1+T_i\cdot p\right)}{5\cdot T_i\cdot p^3+11\cdot T_i\cdot p^2+2\cdot(1+K)\cdot T_i\cdot p+2\cdot K}$$

K et T_i doivent respecter les conditions suivantes :

$$\begin{cases} K>0 \\ T_i>0 \\ -\left(5\cdot K-11\cdot(1+K)\cdot T_i\right)>0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} K>0 \\ T_i>0 \\ T_i>\dfrac{5\cdot K}{11\cdot(1+K)} \end{cases}$$

Q2. On hésite entre $T_i = 5$ s et $T_i = 0{,}5$ s :

Q2a. Déterminer la FTBF dans les deux cas, identifier les coefficients des fonctions de transfert, déterminer K pour chacun des cas, afin que $z = 0{,}5$;

Pour $T_i = 0.5$

$$BO_{0.5}(p) = \frac{K}{0.5\cdot p(1+5\cdot p)}$$

$$BF_{0.5}(p) = \frac{1}{1+\frac{0.5}{K}\cdot p+\frac{2.5}{K}\cdot p^2}$$

par identification à un second ordre :

$$\omega_{n0.5} = \frac{\sqrt{10\cdot K}}{5} \quad z_{0.5} = \frac{\sqrt{10}}{20\sqrt{K}}$$

On souhaite $z = 0.5$ d'où

$$\frac{\sqrt{10}}{20\sqrt{K}} = 0.5 \Rightarrow K_{0.5} = 0.1$$

et donc $\omega_{n0.5} = 0.2$

La FTBF devient pour chacun des cas :

$$BF_{0.5}(p) = \frac{1}{1+50\cdot p+25\cdot p^2}$$

Pour $T_i = 5$

$$BO_5(p) = \frac{5}{5\cdot p(1+0.5\cdot p)}$$

$$BF_5(p) = \frac{1}{1+\frac{5}{K}\cdot p+\frac{2.5}{K}\cdot p^2}$$

$$\omega_{n5} = \frac{\sqrt{10\cdot K}}{5} \quad z_5 = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{K}}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{K}} = 0.5 \Rightarrow K_5 = 10$$

et donc $\omega_{n5} = 2$

$$BF_5(p) = \frac{1}{1+0.5\cdot p+0.25\cdot p^2}$$

Q2b. Pour déterminer la bande passante, nous allons tracer les diagrammes de Bode de la FTBF (seul le diagramme d'amplitude est utile).

La bande passante est plus grande pour $T_i = 5$s.

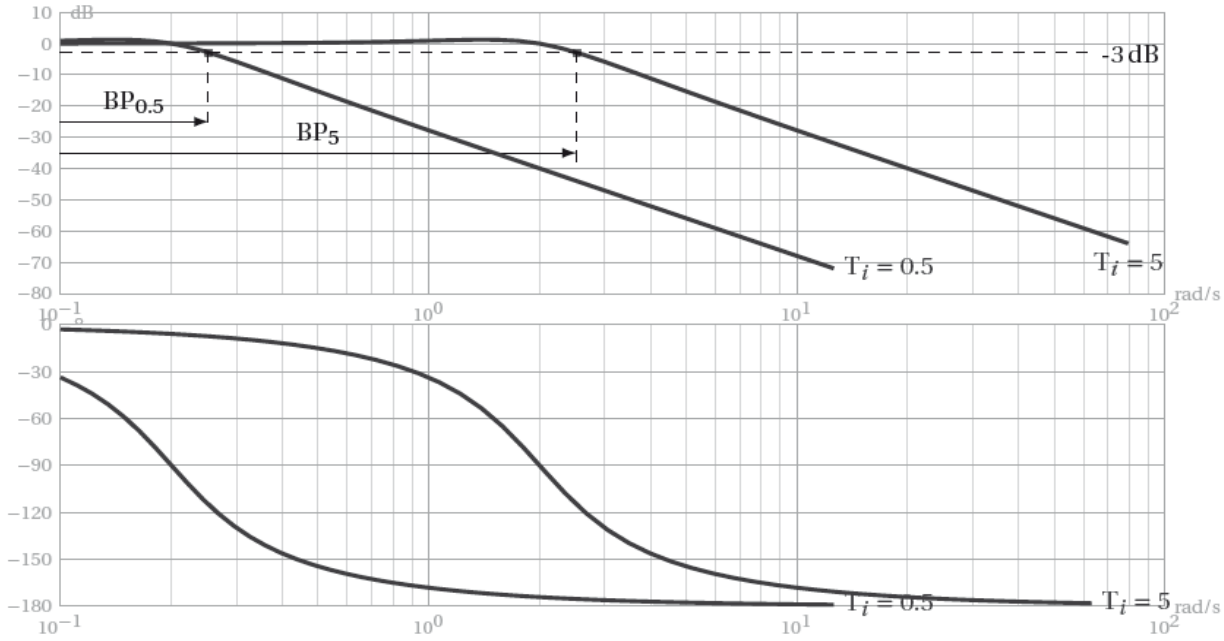


FIGURE 7.37 – Exercice 38- Bande passante

Q3. Nous savons que $S(p) = BF(p)\dfrac{1}{p}$

soit pour chacun des cas.

Pour $T_i = 0.5$ Pour $T_i = 5$

$$S_{0.5}(p) = \frac{1}{p\left(1 + 50 \cdot p + 25 \cdot p^2\right)} \qquad S_5(p) = \frac{1}{p\left(1 + 0.5 \cdot p + 0.25 \cdot p^2\right)}$$

Le tableau des transformées inverses permet de retrouver la réponse temporelle (je vous laisse retrouver l'équation temporelle à partir de la dernière ligne du deuxième tableau).

Indépendamment, nous pouvons déterminer le temps de réponse à partir de l'abaque des temps de réponses (figure A.1 de la page 332). Pour $z = 0.5$, on lit $T_r \cdot \omega_n \approx 5$

$Tr_{0.5} \cdot \omega_{n0.5} \approx 5 \Rightarrow Tr_{0.5} \approx 25\,s$ $Tr_5 \cdot \omega_{n5} \approx 5 \Rightarrow Tr_5 \approx 2{,}5\,s$

Le dépassement est identique pour les deux courbes

$$d\% = \frac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty} = e^{-\frac{\pi \cdot z}{\sqrt{1-z^2}}} \approx 18\%$$

Le temps du premier maximum se déduit de la pseudo–pulsation

$$\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{(1 - z^2)} \Rightarrow T_{pm} = \frac{T_p}{2} = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

$$T_{pm0.5} = \frac{2\pi}{\omega_{n0.5} \cdot \sqrt{(1 - z^2)}} \approx 18\,s \qquad T_{pm5} = \frac{2\pi}{\omega_{n5} \cdot \sqrt{(1 - z^2)}} \approx 1{,}8\,s$$

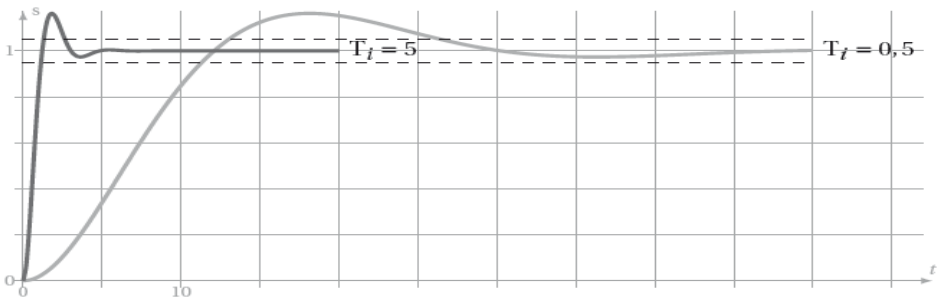


FIGURE 7.38 – Exercice 38- Réponse temporelle

Le temps du premier maximum et le temps de réponse sont plus petits pour $T_i = 5s$.

Q4. Conclure sur réglage du correcteur P.I.

On constate qu'en choisissant pour T_i, la plus grande constante de temps du système, on améliore à la fois la bande passante et la rapidité du système sans trop détériorer le comportement dynamique.

Correction PID

Q1. Pour qu'un système du second ordre soit stable, il faut et il suffit que tous les coefficients du polynôme du dénominateur de la FTBF soit de même signe, ce n'est pas le cas ici.

$$BF(p)=\frac{G(p)}{1+G(p)}=\frac{\dfrac{5}{p^2+9\cdot p-10}}{1+\dfrac{5}{p^2+9\cdot p-10}}=\frac{5}{5+p^2+9\cdot p-10}=\frac{5}{p^2+9\cdot p-5}$$

Q2. $G(p)=\dfrac{5}{(p+10)\cdot(p-1)}$

Q3. $BF(p)=\dfrac{5\cdot K}{p^2+9\cdot p+5\cdot K-10}$

Q4. Le système est stable (strictement) si $K>2$ (tous les coefficients du dénominateur de même signe).

Q5. déterminons dans un premier temps la forme canonique de $BF(p)$

$$BF(p)=\frac{\dfrac{5\cdot K}{5\cdot K-10}}{1+\dfrac{9}{5\cdot K-10}\cdot p+\dfrac{p^2}{5\cdot K-10}}=\frac{K_f}{1+\dfrac{2\cdot z}{\omega_n}\cdot p+\dfrac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Par identification : $\omega_n=\sqrt{5\cdot K-10}$, $z=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{5\cdot K-10}}$, $K_f=\dfrac{5\cdot K}{5\cdot K-10}=\dfrac{K}{K-2}$.

La réponse est apériodique si $z=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{5\cdot K-10}}\geq 1$

$$\sqrt{5\cdot K-10}\leq\frac{9}{2}\Rightarrow K\leq\frac{121}{20}=6{,}05$$

Pour la suite $K=6$.

Q6.

Valeur finale : la sortie tend vers $s(\infty)=K_f\cdot E_0=\dfrac{5\cdot K}{5\cdot K-10}=1.5$

Le système est de classe $\alpha=0$

$$\varepsilon_i=\lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t))=\lim_{p\to 0}(p\cdot\varepsilon(p))=\lim_{p\to 0}\left(p\cdot\left(E(p)-S(p)\right)\right)=\lim_{p\to 0}\left(p\cdot\left(1-BF(p)\right)E(p)\right)$$

$$=\lim_{p\to 0}\left(p\cdot\left(1-\frac{K_f}{1+\dfrac{2\cdot z}{\omega_n}\cdot p+\dfrac{p^2}{\omega_n^2}}\right)\frac{E_0}{p}\right)=\left(1-K_f\right)E_0=-0{,}5$$

Le signe précise que la réponse temporelle de s(t) est « au dessus » de e(t).

La réponse temporelle, pour $K=20$ est représentée sur la figure 7.41(courbe 1).

On montre aussi que $\varepsilon_t=+\infty$.

Sur l'abaque des temps de réponses, on lit que pour $z=1$, $T_r\cdot\omega_n\approx 5$ et $\omega_n=\sqrt{5\cdot K-10}=\sqrt{20}$ d'où $T_r\approx 1{,}1\,s$.

Q7. $\mathrm{BO}(p) = \dfrac{5 \cdot \mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{T}_d \cdot p)}{(p+10) \cdot (p-1)} = \dfrac{\mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{T}_d \cdot p)}{2 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot p) \cdot (p-1)}$, on choisit $\mathrm{T}_d = 0{,}1$.

$$\mathrm{BO}(p) = \frac{\mathrm{K}}{2 \cdot (p-1)}$$

Q8. $$\mathrm{BF}(p) = \frac{\dfrac{\mathrm{K}}{2 \cdot (p-1)}}{1 + \dfrac{\mathrm{K}}{2 \cdot (p-1)}} = \frac{\mathrm{K}}{2 \cdot p + \mathrm{K} - 2} = \frac{\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}-2}}{1 + \dfrac{2}{\mathrm{K}-2} \cdot p}$$

Le gain de la FTBO et la classe n'ayant pas changé, ε_i et ε_t ne changent pas.

Le correcteur PD a amélioré la stabilité du système, celui-ci se comporte maintenant comme un premier ordre (il sera toujours apériodique quelle que soit la valeur de K). Le de temps de réponse à 5% est $\mathrm{T}_r = 3 \cdot \tau = 3 \cdot \dfrac{2}{\mathrm{K}-2}$. Pour $\mathrm{K} = 6$, $\mathrm{T}_r = \dfrac{6}{4} = 1{,}5\,\mathrm{s}$. Le système est un peu plus lent.

Q9. On cherche K tel que $|\varepsilon_i| < 5\% \cdot \mathrm{E}_0$ soit $\dfrac{\varepsilon_i}{\mathrm{E}_0} = \dfrac{1}{1+\mathrm{K}} = 0{,}05$ soit $\mathrm{K} = \frac{0{,}95}{0{,}05} = 19$.

La réponse temporelle, pour $\mathrm{K} = 20$ est représentée sur la figure 7.41(courbe 2).

Q10. Pour annuler l'erreur indicielle, il faut rajouter un terme intégral.

On choisit maintenant un correcteur PID : $\mathrm{C}(p) = \mathrm{C}(p) = \mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{T}_d \cdot p) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{T}_i \cdot p}\right)$ avec $\mathrm{K} = 20$ et $\mathrm{T}_d = 0{,}1$

Q11. Déterminer la FTBO du système puis la FTBF

$$\mathrm{BO}(p) = \mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{T}_d \cdot p) \cdot \left(1 + \frac{1}{\mathrm{T}_i \cdot p}\right) \frac{1}{2 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot p) \cdot (p-1)} = \frac{\mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{T}_i \cdot p)}{2 \cdot \mathrm{T}_i \cdot p \cdot (p-1)}$$

$$\mathrm{BF}(p) = \frac{\mathrm{BO}(p)}{1 + \mathrm{BO}(p)} = \frac{\mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{T}_i \cdot p)}{\mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{T}_i \cdot p) + 2 \cdot \mathrm{T}_i \cdot p \cdot (p-1)}$$

$$= \frac{\mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{T}_i \cdot p)}{2 \cdot \mathrm{T}_i \cdot p^2 + \mathrm{T}_i \cdot (\mathrm{K}-2) \cdot p + \mathrm{K}} = \frac{(1 + \mathrm{T}_i \cdot p)}{\dfrac{2 \cdot \mathrm{T}_i}{\mathrm{K}} p^2 + \dfrac{\mathrm{T}_i \cdot (\mathrm{K}-2)}{\mathrm{K}} \cdot p + 1}$$

Q12. Le dénominateur est un second ordre, pour avoir deux racines doubles, il faut $z = 1$. Soit, par identification : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{\mathrm{K}}{2 \cdot \mathrm{T}_i}}$ et $z = (\mathrm{K}-2)\sqrt{\dfrac{\mathrm{T}_i}{8 \cdot \mathrm{K}}}$ soit $\mathrm{T}_i = \dfrac{40}{81}$ pour $\mathrm{K} = 20$.

Q13. Déterminer la réponse temporelle à un échelon unitaire.

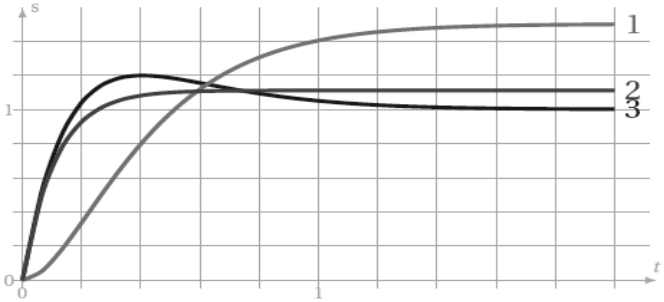
Pour $\mathrm{K} = 20$, $\mathrm{T}_i = \dfrac{40}{81}$ et $\mathrm{T}_d = 0.1$, la FTBF devient $\mathrm{BF}(p) = \dfrac{40 \cdot p + 81}{4 \cdot p^2 + 36 \cdot p + 81}$ et $\mathrm{S}(p) = \dfrac{40 \cdot p + 81}{4 \cdot p^2 + 36 \cdot p + 81} \cdot \dfrac{1}{p}$.

Pour obtenir la réponse temporelle, il est nécessaire de décomposer $\mathrm{S}(p)$ en fractions simples d'où

$$\mathrm{S}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+4{,}5} + \frac{5{,}5}{(p+4{,}5)^2}$$

puis à partir du tableau des transformées inverses, on obtient la réponse temporelle (courbe 3 sur la figure 7.41) :

$$s(t) = 1 + 0{,}5 \cdot e^{-4{,}5 \cdot t}\,(11 \cdot t - 2)$$



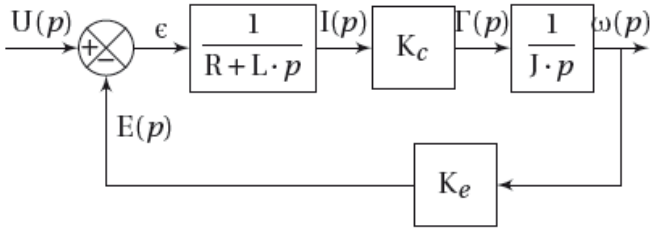
1. correction P seule
2. correction PD
3. correction PID

FIGURE 7.41 – Réponses temporelles

Q14. l'erreur indicielle $\varepsilon_i = 0$, le système est précis. La réponse la plus rapide est celle obtenue avec la correction PD seule mais elle n'est pas précise. La correction PID ne peut être réglée ici sans dépassement.

Robot Sirtes

Q1. Schéma bloc moteur

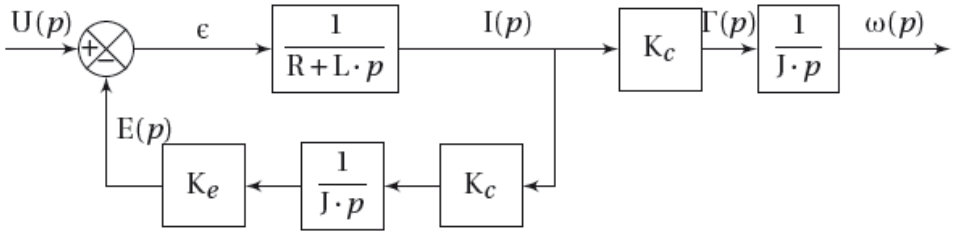


Q2. Fonction de transfert : $M(p) = \dfrac{K_c}{J \cdot p(R + L \cdot p) + K_e \cdot K_c}$ soit en développant

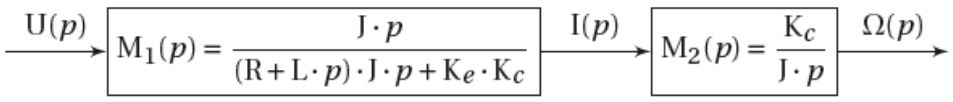
$$M(p) = \frac{K_c}{R \cdot J \cdot p + L \cdot J \cdot p^2 + K_e \cdot K_c}$$

Q3. AN : $\dfrac{1000000}{p^2 + 700 \cdot p + 100000}$

Q4. Représentation fictive : en mettant le schéma bloc sous la forme



On déduit



Q5. AN : $M_1(p) = \dfrac{500p}{(p+500) \cdot (p+200)}$

Q6. Fonction de transfert $G(p)$

$$G(p) = \frac{C_i(p) \cdot K_a \cdot M_1(p)}{1 + C_i(p) \cdot K_a \cdot M_1(p) \cdot R(p)}$$

$$G(p) = \frac{\left(T_f p + 1\right) J K_a \left(T_i p + 1\right) k_i}{T_i \cdot LT f p^3 + T_i J(RT_f + L) p^2 + T_i(JR + K_e K c T_f + k_i K_a J k) p + T_i K_e K_c + k_i K_a J k}$$

Q7. AN : $\dfrac{10000 \cdot (2000 + p)}{p^2 + 2200 \cdot p + 400000 + 20000000 \cdot k}$

Remarque : il est préférable pour simplifier cette fonction de transfert de repartir de la FTBO avec les valeurs numériques puis de recalculer la FTBF.

Q8. Forme canonique : $\dfrac{1}{40 + 2000 \cdot k} \dfrac{(2000 + p)}{\dfrac{p^2}{400000 + 20000000 \cdot k} + \dfrac{22}{4000 + 200000 \cdot k} \cdot p + 1}$

par identification

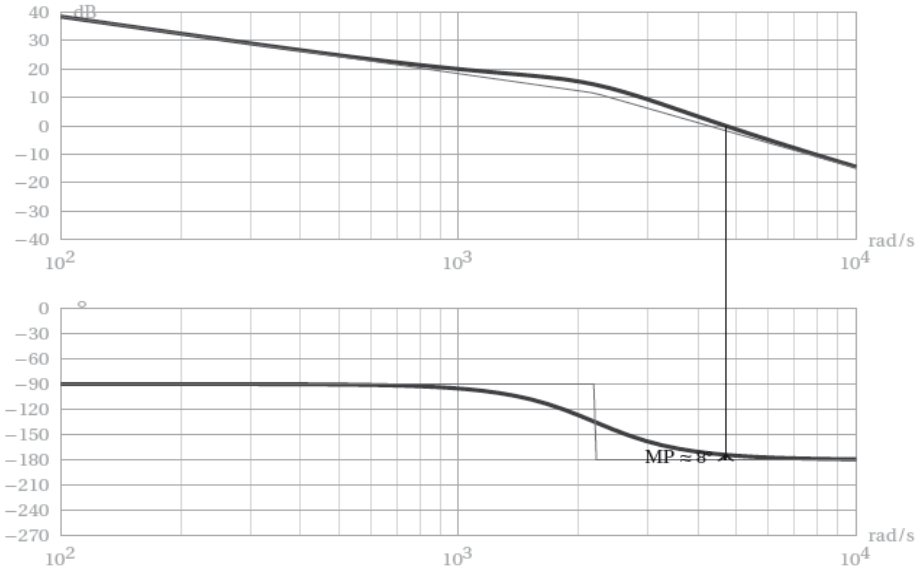
$\omega_0 = \sqrt{400000 + 20000000 \cdot k}$ et $2\dfrac{z}{\omega_0} = \dfrac{22}{4000 + 200000 \cdot k}$

Pour avoir $z = 0,5$ il faut $k = 0,222$ d'où finalement $\omega_0 = 2200$ rad/s.

Q9. Boucle ouverte

$$\begin{aligned} BO(p) &= C_v(p)\cdot G(p)\cdot M_2(p)\cdot K_t \\ &= K_v\cdot 10000\frac{2000+p}{p^2+2200\cdot p+4840000\cdot}\frac{K_c}{J\cdot p} \\ &= \frac{20000000\cdot(2000+p)\cdot K_v}{(p^2+2200\cdot p+4840000)\cdot p} \end{aligned}$$

Q10. On mesure la marge de phase MP ≈ 8° sur le diagramme de phase (figure 7.42), la marge de gain est infinie (le lieu de phase ne coupe jamais l'argument −1°80). Le système est fortement oscillant.



!htb

FIGURE 7.42 – Exercice 42- Diagrammes de Bode

Q11. le système est stable pour toute les valeurs de K_v positives.

Q12. la FTBF s'écrit :

$$BF(p) = \frac{200000\cdot(2000+p)\cdot K_v}{p^3+2200\cdot p^2+4840000\cdot p+400000000\cdot K_v+200000*K_v\cdot p}$$

Le système est stable si $\frac{200000}{11\cdot K_v}+4840000>0$ et $400000000\cdot K_v>0$ soit $K_v>0$, on retrouve le résultat précédent.

Q13. Le système est de classe $\alpha=1$ et est stable, l'erreur indicielle est donc nulle : $\varepsilon_i=0$.

Q14. Erreur de traînage.

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t)) = \lim_{p\to 0}(p\cdot\varepsilon(p)) = \lim_{p\to 0}(p\cdot(Cons(p)-K_v\Omega(p)) \\ &= \lim_{p\to 0}(p\cdot\frac{1}{1+BO(p)}Cons(p)) \\ &= \lim_{p\to 0}(p\cdot\frac{5\cdot 10^{-5}\cdot p(p^2+2200\cdot p+4840000)}{5\cdot 10^{-5}\cdot p(p^2+2200\cdot p+4840000)+K_v\cdot 1000(2000+p)}Cons(p)) \end{aligned}$$

avec ici : $Cons(p)=\frac{a}{2\cdot p^2}$

$$= \lim_{p\to 0}(\frac{5\cdot 10^{-5}\cdot p^2(4840000)}{K_v\cdot 1000(2000)}\frac{a}{2\cdot p^2}) = \frac{121\cdot a}{1000000\cdot K_v}$$

Pour limiter l'erreur de traînage relative $\frac{\varepsilon_v}{a}$ à 1%, il faut $K_v=0{,}0242$.

Remarque : cette valeur de K_v va améliorer le comportement dynamique en augmentant la marge de phase (diminution des oscillations).

Q15. Cf. figure 7.43.

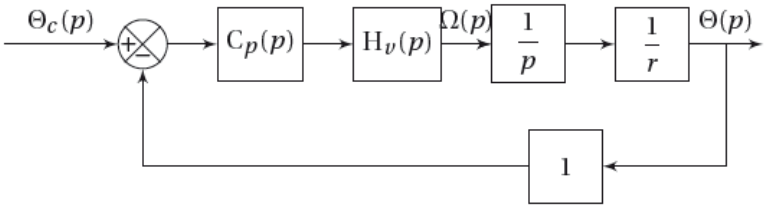


FIGURE 7.43 – Schéma Bloc de l'asservissement de position du robot Sirtes

Q16. la FTBO de l'asservissement de position s'écrit : $BO_p(p) = C_p(p) \cdot H_v(p) \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{r} \cdot 1$ soit

$$BO_p(p) = 121000 \cdot \frac{(2000+p)}{(p+100)/(p^2+2100 \cdot p+4840000) \cdot p}$$

Le système est stable, la marge de phase est d'environ MP ≈ 90°, la pulsation $\omega_{0dB} = 0{,}5 \text{rad s}^{-1}$ est relativement basse.

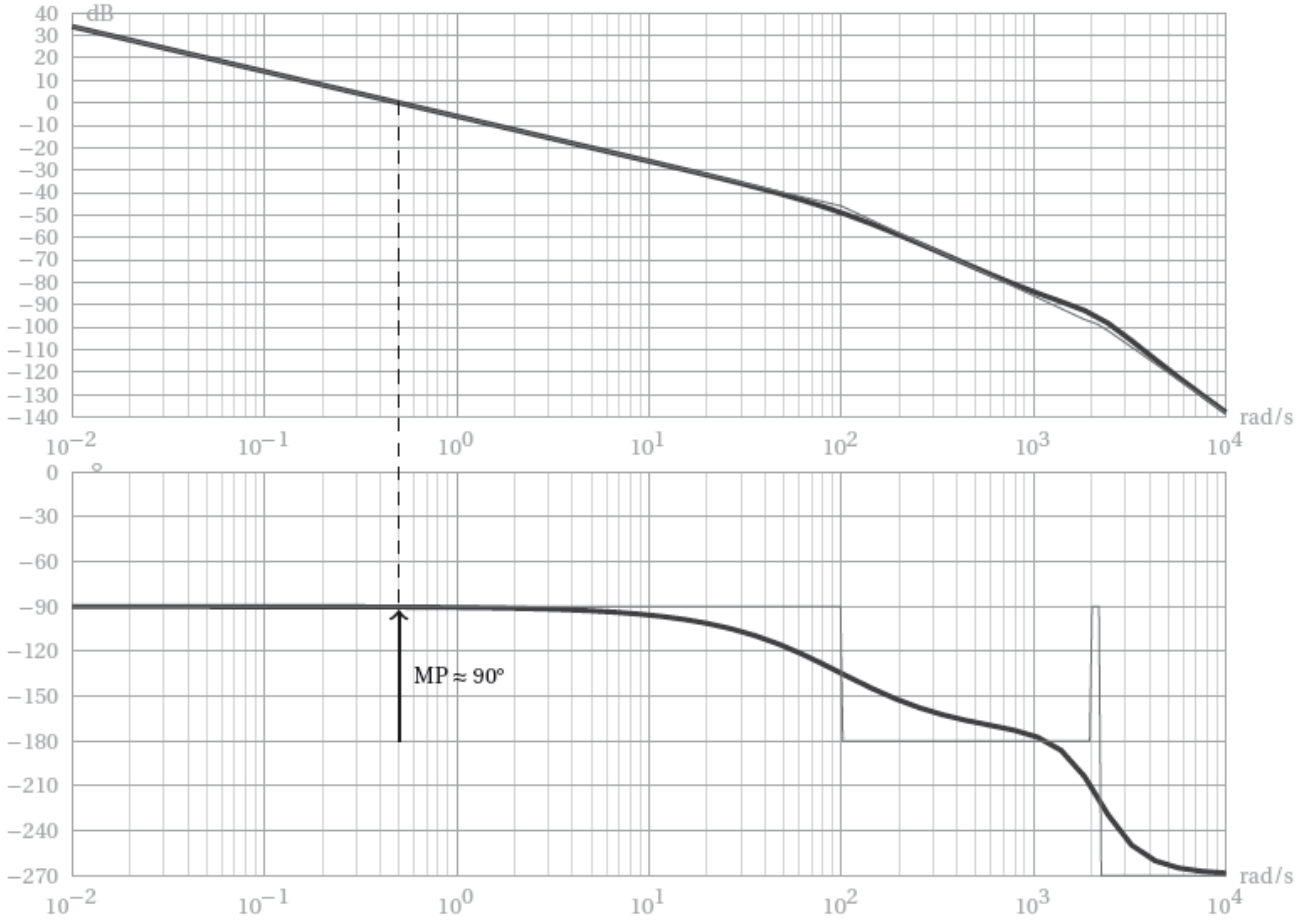


FIGURE 7.44 – Diagrammes de Bode FTBO robot Sirtes

Q17. Le système est stable et précis vis à vis d'une entrée en échelon, on peut ici, proposer un correcteur qui améliore le temps de réponse en augmentant la bande passante en réglant par exemple la marge phase à MP = 50°. Un simple correcteur proportionnel suffit.