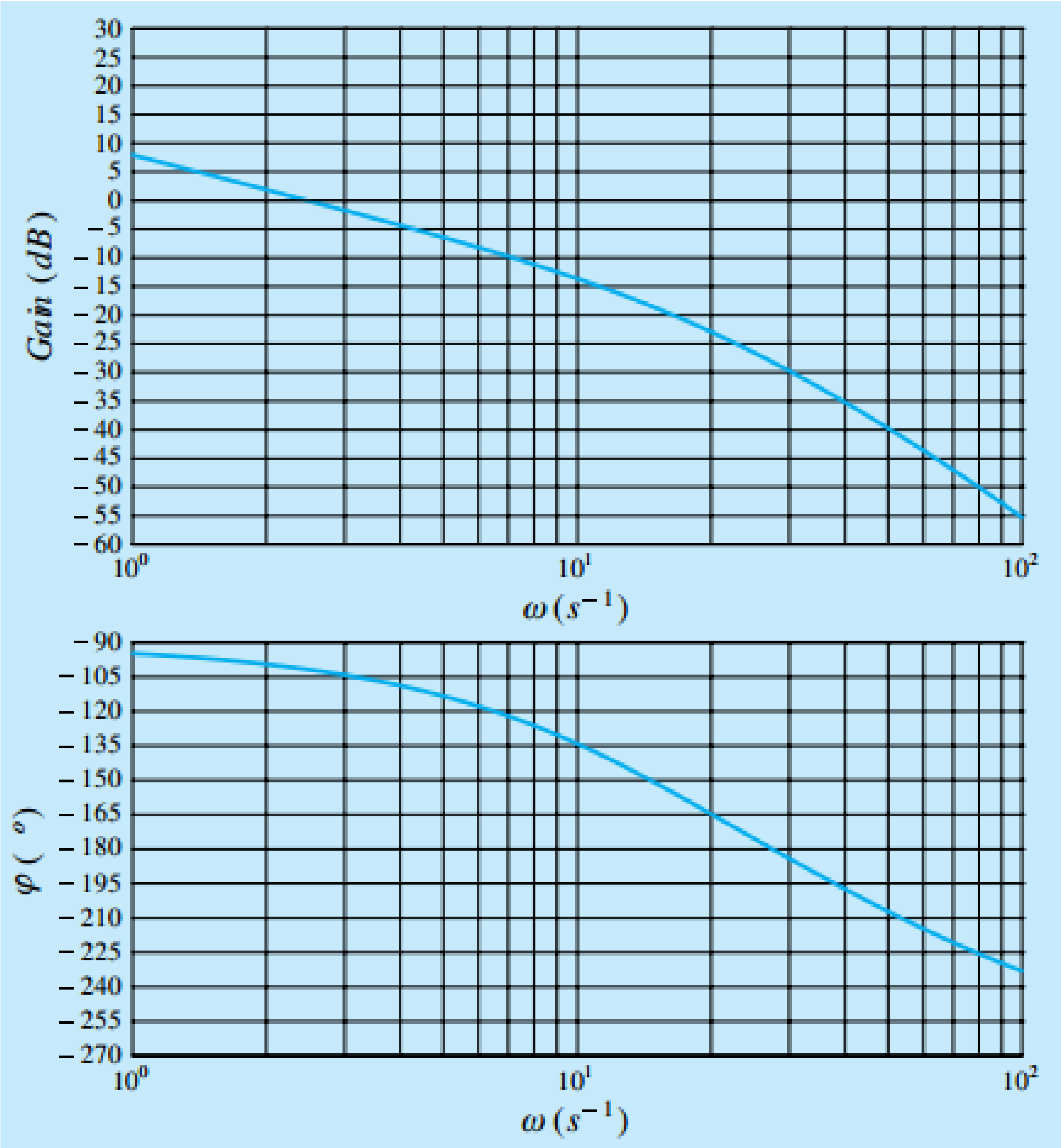
Détermination de marges de stabilité sur un diagramme de BODE

Soit F(p) la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire d'entrée x(t) et de sortie y(t). Les diagrammes de BODE de F(p) sont représentés sur la figure ci-dessous.

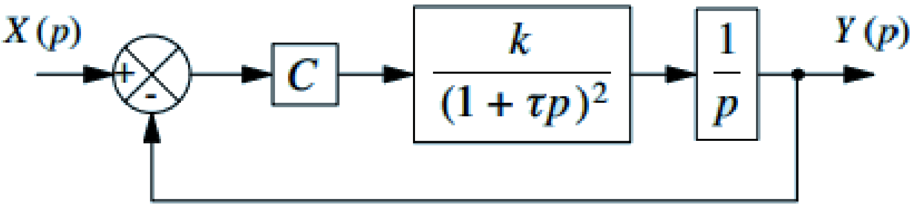


Diagrammes de BODE de la FTBO

1. Tracer le schéma-bloc du système.
2. Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.
3. On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note Kp le gain de ce correcteur.
•Déterminer la valeur de Kp permettant d'obtenir une marge de gain MG=12 dB.
•Déterminer la nouvelle marge de phase du système.
•Conclure quant à la stabilité du système.
4. En précisant la méthode permettant de le calculer, déterminer l'écart statique εs du système corrigé pour une entrée indicielle.

Asservissement à correction proportionnelle

On considère un asservissement à correction proportionnelle décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure ci-dessous.

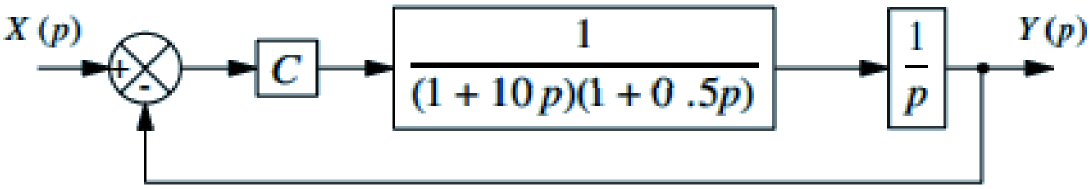


Pour les applications numériques on prendra : C=1, k=0,5et τ=2s.

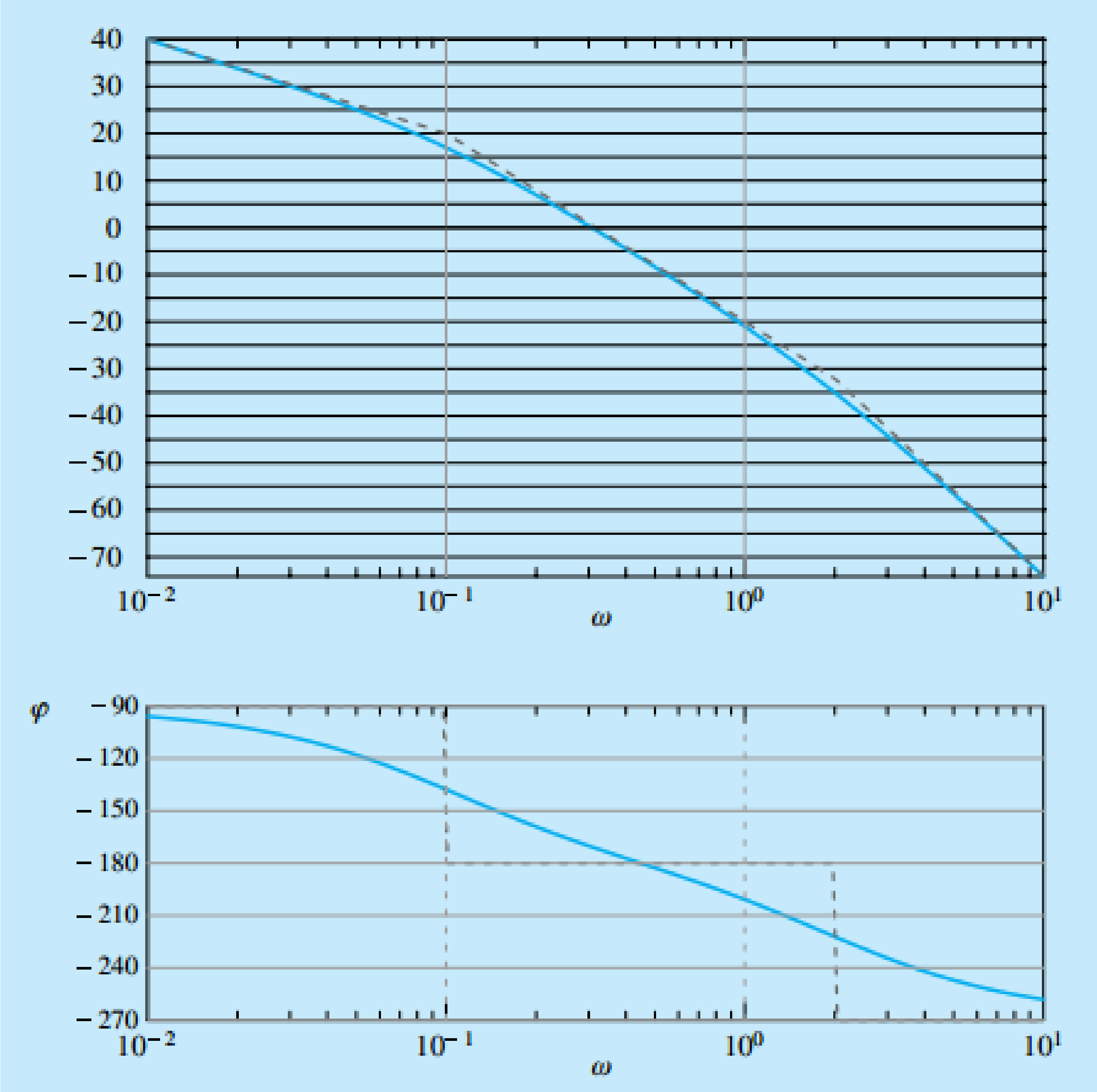
1. Calculer la valeur de la pulsation qui donne une phase de −180°.
2. En déduire la valeur C1 du gain C correspondant à la limite de la stabilité. La comparer avec la valeur proposée initialement.
3. Déterminer la valeur de C2 du gain C qui donne une marge de gain de 12 dB.

Lecture de marges et correction proportionnelle

On considère un asservissement à correction proportionnelle décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure ci-dessous.

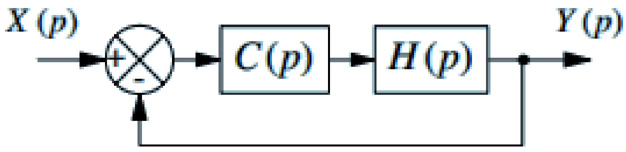


1. Indiquer, en justifiant la réponse, à quelle fonction de transfert correspondent les diagrammes de BODE de la figure ci-dessous.
2. Déterminer graphiquement les marges de gain et de phase du système décrit précédemment dans le cas où C=1.
3. Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de C permettant de vérifier ce cahier des charges.



Choix d'une correction

On considère un asservissement décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure ci-dessous.

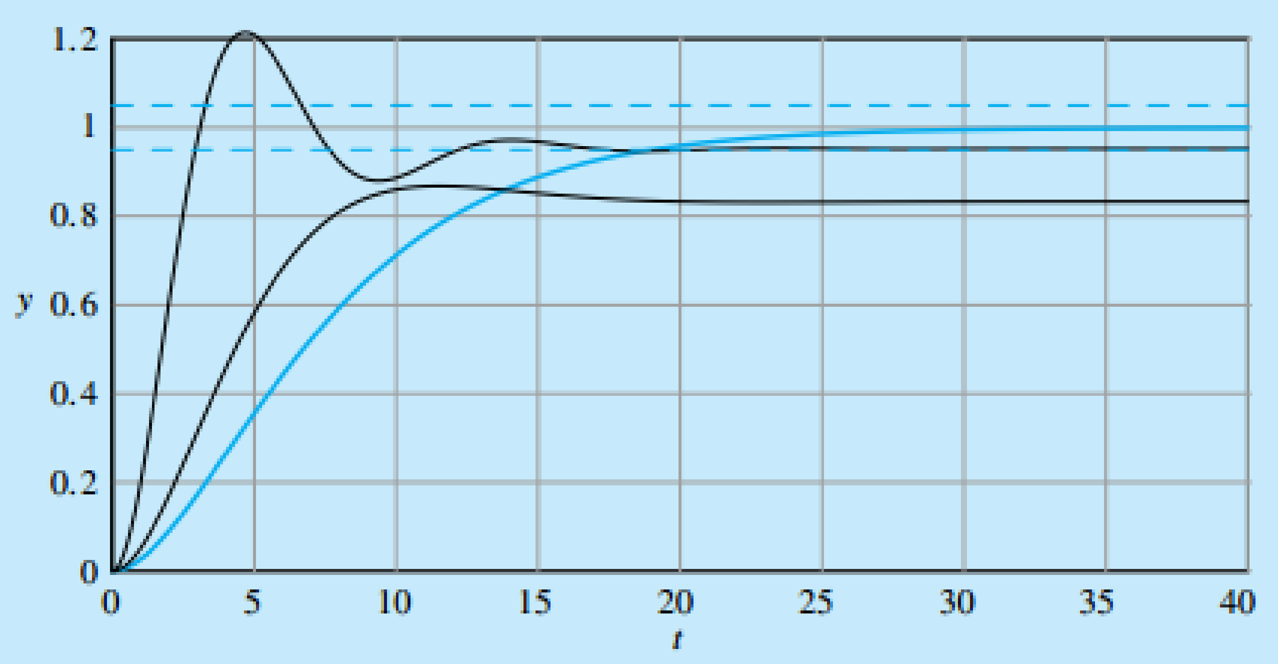


La fonction de transfert H(p) est de la forme : $H(p)=\dfrac{a}{(1+T_1\cdot p)(1+T_2\cdot p)}$

1. Déterminer la fonction de transfert du correcteur qui permet d'obtenir une fonction de transfert en boucle fermée de la forme suivante $FTBF(p)=\dfrac{1}{1+\dfrac{2m}{\omega_0}\cdot p)+\dfrac{1}{\omega_0{}^2}\cdot p^2}$

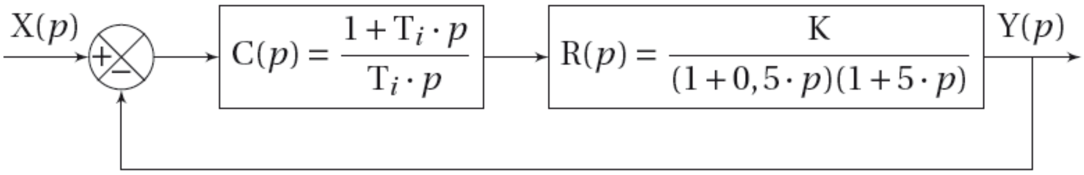
On exprimera C(p) en fonction de la FTBO non corrigée, H(p) et des constantes ω0et m de la FTBF souhaitée.

2. Choisir C(p) tel que le correcteur ait une forme simple et que le zéro associé à la constante de temps T1, considérée comme gênante, disparaisse.
3. Déterminer complètement le correcteur si le coefficient d'amortissement recherché pour la FTBF est m=1.
4. On considère la fonction de transfert H(p) telle que a=5, T1=20 s et T2=2s. Les courbes de réponses indicielles sont représentées ci-dessous pour les 3 cas suivants :
•sans correction ;
•avec une correction proportionnelle telle que l'erreur statique de position soit limitée à5% ;
•avec la correction PI choisie.
Mettre en évidence l'intérêt de la correction PI dans ce cas.



Correction PI

Un système est corrigé par un correcteur de type PI.



Q1. A partir du critère de Routh déterminer à quelles conditions sur K et T_i le système est stable.

Q2. On hésite entre $T_i = 5$ s et $T_i = 0,5$ s :

Q2a. Déterminer la FTBF dans les deux cas, mettre sous forme canique puis identifier les coefficients des fonctions de transfert. Déterminer K pour chacun des cas, afin que le coefficient d'amortissement soit $z = 0,5$.

Q2b. Déterminer graphiquement la bande passante pour chacun des cas.

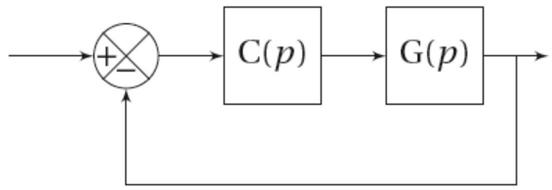
Q3. On sollicite le système avec une entrée de type échelon $e(t) = 10$, tracer la réponse temporelle pour chacun des cas.

Q4. Conclure sur réglage du correcteur P.I.

Correction PID

La mise en équation du système à étudier a permis de déterminer sa fonction de transfert.

$$G(p) = \frac{5}{p^2 + 9 \cdot p - 10}$$



A. Étude préliminaire

Q1. Justifier que ce système est instable ($C(p) = 1$).

Q2. Mettre $G(p)$ sous la forme d'un produit de fonctions.

B. Régulation proportionnelle

On choisit dans un premier temps $C(p) = K$.

Q3. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée

Q4. Déterminer pour quelles valeur de K, le système peut être rendu stable ?

Q5. Déterminer K pour que la réponse à un échelon de la fonction de transfert en boucle fermée soit apériodique. Pour la suite, on choisira la valeur entière la plus proche.

Q6. Déterminer la valeur finale, pour un échelon unitaire. Calculer l'erreur indicielle ε_i et le temps de réponse à partir de l'abaque en annexe. Calculer l'erreur de traînage ε_t (rampe unitaire).

C. Régulation PD

On choisit maintenant un correcteur PD $C(p) = K \cdot \left(1 + T_d \cdot p\right)$

Q7. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte en fonction de K et T_d.

On choisit T_d afin d'annuler le pôle dominant stable de la FTBO.

Q8. Déterminer la FTBF puis, pour la valeur de K précédemment déterminée, calculer l'erreur indicielle ε_i et l'erreur de traînage ε_t. Quel est l'intérêt principal de ce correcteur ?

Q9. Déterminer K tel que $|\varepsilon_i| < 5\% \cdot E_0$.

Q10. Comment doit-on modifier le correcteur pour annuler l'erreur indicielle ?

D. Correction PID

On choisit maintenant un correcteur PID $C(p) = C(p) = K \cdot \left(1 + T_d \cdot p\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{T_i \cdot p}\right)$ avec $K = 20$ et $T_d = 0{,}1$.

Q11. Déterminer la FTBO puis la FTBF, mettre la FTBF sous forme canonique.

Q12. Déterminer T_i afin que le dénominateur possède deux racines réelles doubles.

Q13. Déterminer la réponse temporelle à un échelon unitaire.

Q14. Conclure.

Robot Sirtes

A. Données

On considère le problème de l'asservissement en position de l'axe 3 (coude) du robot Sirtes (figure 7.31).

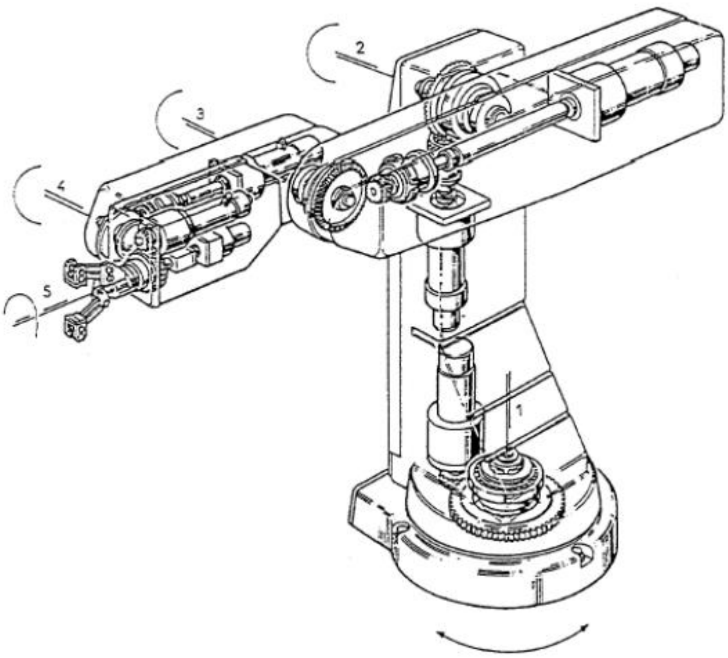


FIGURE 7.31 – Robot Sirtes

L'actionneur mis en oeuvre est un moteur à courant continu à aimant permanent que l'on peut modéliser par les équations suivantes :

$$u(t) = \mathrm{R}.i(t) + \mathrm{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t) \tag{7.18}$$

$$e(t) = \mathrm{K}_e \cdot \omega(t) \tag{7.19}$$

$$\Gamma(t) = \mathrm{K}_c \cdot i(t) \tag{7.20}$$

$$\mathrm{J} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = \Gamma(t) \tag{7.21}$$

avec

- $u(t)$ tension d'induit ;
- $i(t)$ courant d'induit ;
- $\omega(t)$ vitesse de rotation ;
- $\Gamma(t)$ couple moteur ;
- $e(t)$ fcem ;
- K_c constante de couple ;
- K_e constante de fcem ;
- R résistance d'induit ;
- J inertie ramenée sur l'arbre moteur.

La technique examinée ici est basée sur la synthèse de boucles de régulation successives.

B. Modélisation

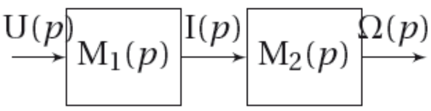
Q1. Donner le schéma bloc représentant la fonction de transfert du moteur avec $u(t)$ comme grandeur d'entrée et $\omega(t)$ comme grandeur de sortie.

Q2. Calculer la fonction de transfert du moteur $M(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$

Q3. Application Numérique :

- $R = 1{,}4\,\Omega$,
- $L = 2{,}10 \times 10^{-3}\,H$,
- $K_c = 0{,}1\,NA^{-1}$,
- $K_e = 0{,}1\,V/(rad/s)$,
- $J = 5\,kgm^2$.

Q4. Donner une représentation fictive de $M(p)$ sous la forme ci dessous. Déterminer $M_1(p)$ et $M_2(p)$ sous une forme littérale.

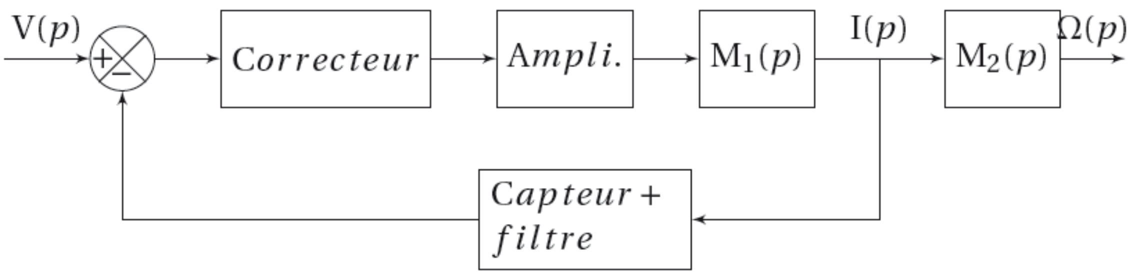


Q5. Monter que $M_1(p)$ peut se mettre sous la forme : $M_1(p) = \dfrac{500p}{(p+500)\cdot(p+200)}$.

Pour la suite, on conservera cette forme.

C. Boucle de courant

Pour éviter des pics prohibitifs du courant dans l'induit (et dans le convertisseur), on effectue un bouclage sur le courant comme le montre la figure suivante.



Le capteur de courant dans la boucle de retour est une sonde à effet Hall associée à un filtre pour atténuer les ondulations du courant dues à la MLI (Modulation de Largeur d'Impulsions). La fonction de transfert de cet ensemble est donnée par $R(p) = \dfrac{k}{(1+T_f p)}$ avec $T_f = 0{,}5\ ms$. L'amplificateur de puissance possède un gain

$K_a = 10$. Le correcteur est du type PI (Proportionnel et Intégral) ayant comme fonction de transfert $Ci(p) = k_i \left(1 + \dfrac{1}{T_i \cdot p}\right)$, avec $k_i = 2$ et $T_i = 2\ ms$.

Q6. Donner l'expression littérale de la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{I(p)}{V(p)}$.

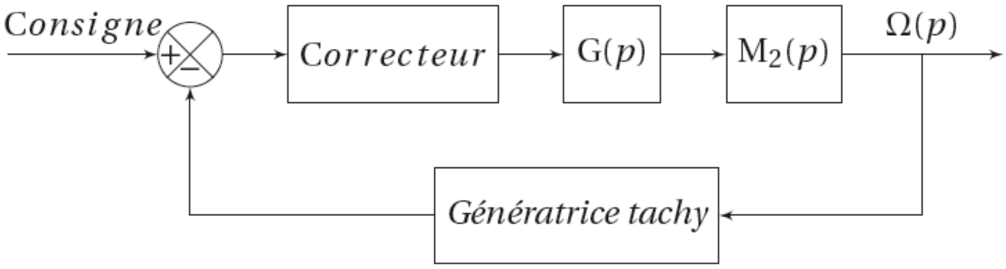
Q7. Application numérique : mettre $G(p)$ sous la forme $\dfrac{K_G \cdot N(p)}{D(p)}$ avec $N(p)$ un polynôme du premier ordre et $D(p)$ un polynôme du second ordre, les deux polynômes seront mis sous forme canonique.

Q8. Déterminer la valeur du paramètre k permettant d'assurer, pour $G(p)$, un coefficient d'amortissement $z = 0{,}5$. Déduire dans ce cas la pulsation propre ω_o du système du second ordre et son gain statique K_G.

Pour la suite on prendra : $G(p) = 10000 \dfrac{2000 + p}{p^2 + 2200 \cdot p + 4840000}$

D. Boucle de vitesse

On réalise une régulation de la vitesse sous la forme donnée par la figure ci dessous.



La génératrice tachymétrique est modélisée par une transmittance constante de $K_t = 0{,}1$ V/rad/s. La fonction de transfert du correcteur est notée $C_v(p)$. On prendra $C_v(p) = K_v$ (correcteur proportionnel).

Q9. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte.

Q10. Tracer l'allure de la réponse en fréquence (asymptotes et courbe) du système (FTBO) avec $K_v = 1$ dans le plan de Bode . Préciser la marge de gain et la marge de phase.

Q11. Déterminer graphiquement,pour quelles valeurs de K_v le système est stable.

Q12. Retrouver ce résultat à partir du critère de Routh

Q13. Calculer l'erreur indicielle.

Q14. Calculer l'erreur de vitesse (erreur permanente pour une entrée en rampe) dans ce système asservi. Déduire ainsi la valeur de K_v permettant de limiter cette erreur à 1%.

Dans la suite du problème on supposera que la fonction de transfert, en boucle fermée, du système régulé en vitesse est donnée par

$$H_v(p) = 2420000 \frac{2000 + p}{(p + 100)\left(p^2 + 2100\,p + 4840000\right)}$$

E. Boucle de position

On cherche à asservir la position (l'angle θ) de l'axe. On dispose pour cela d'un réducteur placé entre l'axe moteur et le bras avec un rapport de réduction $r = 20$ et d'un capteur de position (potentiomètre, fournissant une tension de 1 V pour une rotation de 1 rad).

Q15. Tracer le schéma bloc du système asservi en position avec un correcteur série notée $C_p(p)$. La sortie du correcteur doit fournir la consigne pour la boucle de vitesse.

Q16. Pour $C_p(p) = 1$, donner l'allure de la réponse en fréquence asymptotes et courbe) du processus (FTBO) dans le plan de Bode (on tracera le diagramme entre 0,01 rad/s et 10000 rad/s). En déduire l'allure du diagramme de Black. A partir de ce dernier diagramme, que peut-on conclure sur la stabilité du système non corrigé ?

Q17. Proposer un correcteur permettant d'améliorer la stabilité.